目　录

第一章　　矢量代数

在这一章里，我们要介绍矢量的代数运算。这些知识假定读者早已知道，在这里不讲细节，只讲与以后讨论矢量和张量分析有关的材料。

在各门科学中所遇到的量，可以分为两类：一类完全由数值决定，例如面积、温度、时间、质量等，这一类量称为标量；另一类量，只知道数值的大小还不够，还需说明它的方向，例如力、速度、加速度等，这一类量称为矢量（或向量）。仅表示矢量大小的数值称为矢量的模。如果抽去矢量的具体性质，矢量可以用一条有向线段表示，使它的正方指向矢量的方向，它的长度等于矢量的模。表示矢量的记号是用一个上面带着箭头的拉丁字母如 $\vec{a}$、$\vec{b}$ …，或用黑体字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、…来表示。有时为了表示出它的起点和终点，便用 $\boldsymbol{OM}$，$\boldsymbol{AB}$…，其第一个字母表示矢量的起点，第二个字母表示矢量的终点。矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示。

本书所讲的矢量均指自由矢量，就是当两个矢量的方向相同，模相等时，就认为它们是相等的。因此，一个矢量经过平移后仍旧是原来的矢量。

§1.1　矢量的加、减法

一、加法

设有几个矢量，例如四个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$。任取一点 O，作矢量 $\boldsymbol{a}$，由它的终点 A 作矢量 $\boldsymbol{b}$，再由矢量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 作矢量 $\boldsymbol{c}$，余类推（图 1—1），这样直至取尽所有的矢量为止。结果就得到折线 $OABCD$，该折线的封闭线 OD 就称为所给矢量之和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$。

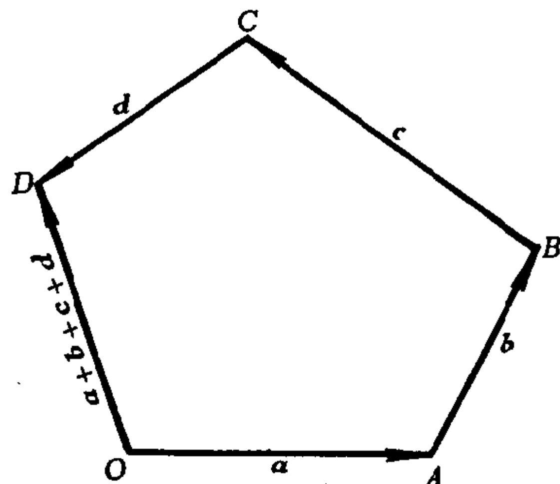


图 1—1

特别是，两个矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 1—2）是以 $\boldsymbol{a}$ 的起点 O 为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 为终点所构成的矢量 $\boldsymbol{OB}$。

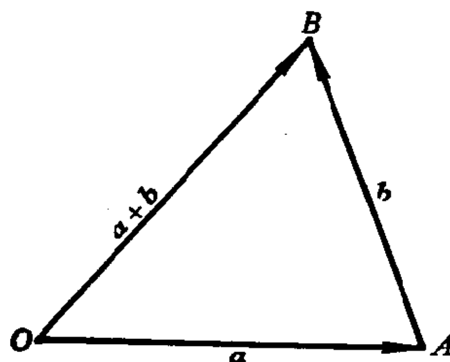


图 1—2

由图 1—3 和图 1—4 可知，矢量和具有加法的交换律和结合律。即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

和

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$

二、减法

矢量的减法定义为加法的逆运算，如果矢量 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{M}=\boldsymbol{a}$ 则称矢量 $\boldsymbol{M}$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。即

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

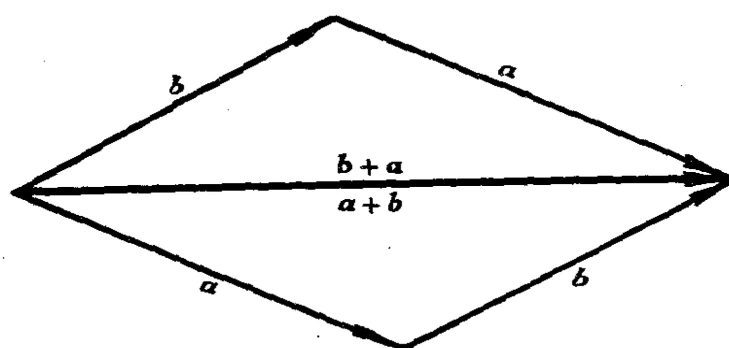


图 1—3

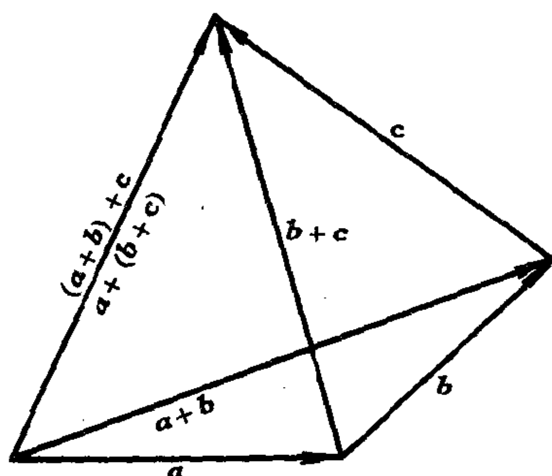


图 1—4

求矢量 $a - b$ 的几何方法如下：

由矢量 a 的终点作一矢量 c，让 c 与矢量 b 的大小相等，方向相反，则以矢量 a 的起点为起点，以矢量 c 的终点为终点的矢量 M（图 1—5），它满足关系式：

$$b + M = a$$

故矢量 M 是 a 与 b 之差。

与矢量 N 大小相等方向相反的矢量，称与 N 相逆的矢量，记作 $-N$。由图 1—5 可知矢量 a 与 b 之差 $a-b$，也就是 a 与 $-b$ 之和。即

$$a - b = a + (-b)$$

为方便起见，我们把模为零的特殊矢量，称为零矢量，记作 $\mathbf{0}$，或简记 0，零矢量的方向是任意的。对于任意一个矢量 a 均有

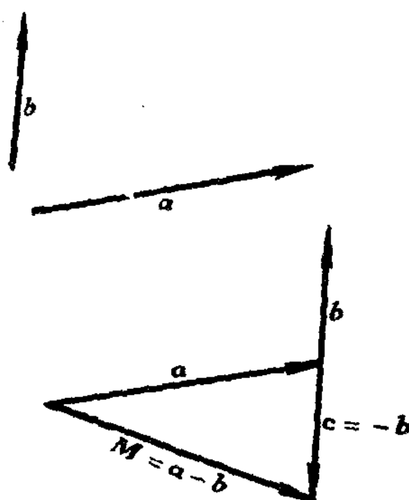


图 1—5

$$a - a = 0$$

§1.2 数量与矢量的乘积

若有一个数量 m 和一个矢量 $\boldsymbol{a}$，所谓数量 m 和矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $m\boldsymbol{a}$（或 $\boldsymbol{a}m$），是一个矢量。它的模等于 $|m||\boldsymbol{a}|$；它的方向，当 $m > 0$ 时方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，$m < 0$ 时方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反，$m = 0$ 时模为零，是个零矢量，方向是任意的。

位于平行线上的矢量，称为共线矢量。设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零矢量，如果两矢量共线，则它们具有相同或相反的方向，由数量与矢量乘积的定义知，两矢量间存在关系式：

$$\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a}$$

反之，若两矢量具有关系式 $\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a}$，则矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 具有相同或相反的方向，因此矢量 $\boldsymbol{b}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 共线。

根据以上的讨论可知，对于任何两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们共线的充要条件是：存在一个不等于零的数量 m 使等式 $\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a}$ 成立。

模为 1 的矢量，称为单位矢量。矢量 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量是方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，且模为 1 的矢量，记作 $\boldsymbol{a}^0$。显然，任何矢量 $\boldsymbol{a}$ 均可写成

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \qquad (1-1)$$

上面的式子把矢量 $\boldsymbol{a}$ 分成两部分，分别表示该矢量的模 $|\boldsymbol{a}|$ 和它的方向 $\boldsymbol{a}^0$。

§1.3 矢量的投影

在解析几何中，已经讲过线段在轴上投影的基本原理，现在我们来讨论矢量在轴上投影的基本定理，这些定理容易由解析几何中有关投影的定理得到，这里将不加证明地叙述其主要内容。

定义 设有一矢量 $\boldsymbol{a}$ 及一轴 l，过矢量 $\boldsymbol{a}$ 的起点 A 和终点 B 分别作平面 P、Q 垂直于轴 l，且交轴于 A' 和 B'（图 1—6），我们称轴 l 上的有向线段 $\overline{A'B'}$ 的值（记作 $A'B'$）为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 l 上的投

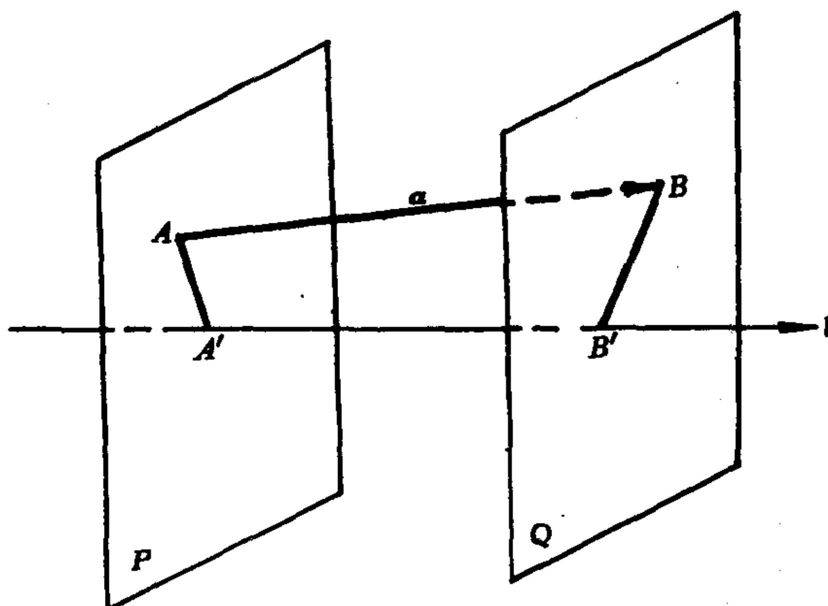


图 1—6

影，记作 $\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a}$，即

$$\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a} = A'B'$$

关于矢量的投影有下面的基本定理

(1) 矢量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 l 上的投影等于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模与矢量 $\boldsymbol{a}$ 及轴 l 间夹角 φ 的余弦的积。即

$$\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi \qquad (1—2)$$

(2) 矢量和在任何轴上的投影等于各项矢量在同轴上的投影之和。即

$$\mathrm{prj}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$$
$$=\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a}+\mathrm{prj}_l\boldsymbol{b}+\mathrm{prj}_l\boldsymbol{c}+\mathrm{prj}_l\boldsymbol{d} \tag{1—3}$$

设矢量 $\boldsymbol{OM}$ 的起点是坐标原点 O，而终点 M 的坐标是 (x, y, z)，如图 1—7 所示，由矢量的加法得

$$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{PM}$$

而

$$\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{AP}$$

因 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{OB}, \boldsymbol{PM}=\boldsymbol{OC}$ 所以

$$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}$$

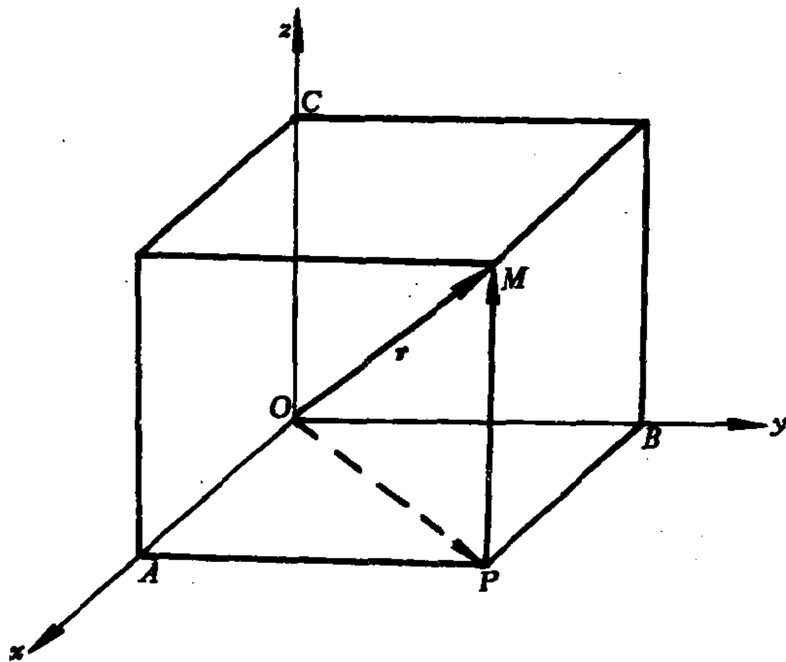


图 1—7

矢量 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$ 和 $\boldsymbol{OC}$ 称为矢量 $\boldsymbol{OM}$ 在坐标轴上的分矢量。点 M 的坐标 $x=OA, y=OB, z=OC$，因此 OA, OB, OC 正是矢量 $\boldsymbol{OM}$ 在坐标轴上的投影。我们在坐标轴的正向作单位矢量，以 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表之，这样引进的三个两两互相垂直的单位矢量，称为基本单位矢量，于是

$$\boldsymbol{OA}=x\boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{OB}=y\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{OC}=z\boldsymbol{k}$$

所以

$$\boldsymbol{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1—4}$$

式中 x，y，z 是矢量 $\boldsymbol{OM}$ 在坐标轴上的投影，在矢量的起点为坐标原点的情况下，x，y，z 也正好是矢量终点 M 的坐标。

上面公式，不但对于由原点出发的矢量是成立的，并且对于以空间任一点作起点的矢量也是成立。

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{1—5}$$

其中 a_x，a_y，a_z 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影。这个表示式称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的投影式，简记为 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$。

矢量的投影表示式在矢量理论中有特别重要的意义，依靠它建立起矢量理论的两部分，即几何的和代数的两部分之间的联系。

设已知两个矢量

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

与

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

由投影的基本定理可得

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})_x = a_x + b_x, \qquad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})_y = a_y + b_y$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})_z = a_z + b_z$$

由此

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k} \tag{1—6}$$

也就是已知矢量的投影，在几何相加矢量时，必须将同名的投影分别相加，这样一个几何和归结为三个代数和。

仿之，几何差可以写为

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k} \tag{1—7}$$

数量乘矢量可以写为

$$m\boldsymbol{a} = ma_x\boldsymbol{i} + ma_y\boldsymbol{j} + ma_z\boldsymbol{k} \tag{1—8}$$

联结坐标原点与点 M $(x、y、z)$ 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 称为点 M 的矢径（图1—7），由图可知

$$OA = x \qquad OB = y \qquad OC = z$$

或

$$r_x = x \qquad r_y = y \qquad r_z = z$$

这时 $\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1—9}$$

且其模是

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

§1.4　两矢量的标量积

一、定义

两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模和它们间夹角 φ 的余弦的乘积，称为两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的标量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi \tag{1—10}$$

由定义得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$$

如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$ 则上式可写成

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$$

二、标量积的基本性质

1. 非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

因为当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直时，$\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0$ 从而

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0$$

反之，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，并且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 皆不为零矢量，则有

$$\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0$$

所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直。

2. 由标量积的定义可知，标量积满足交换律，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

3. 标量积满足分配律，即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

事实上，由标量积的定义有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{c}\hat{,}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

再由投影定理知

$$\mathrm{prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{prj}_c\boldsymbol{a}+\mathrm{prj}_c\boldsymbol{b}$$

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{prj}_c\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{prj}_c\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

4. 由标量积的定义易知，标量积与标量的乘积满足结合律，

即

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})m=\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

三、标量积的投影表示法

设有两个矢量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 由上面所述标量积的基本性质得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&\quad+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}\\&\quad+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的单位矢量，故有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\qquad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

和

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\qquad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

最后得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{1—11}$$

这就是说，两个矢量的标量积等于它们在坐标轴上同名投影的乘积的代数和。

特别是 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时得到

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$$

所以

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1—12}$$

四、两矢量间的夹角

设两矢量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 之间的夹角为 φ，由式(1—10)得

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \tag{1—13}$$

由两矢量标量积和矢量的模的投影表示式得到

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \tag{1—13′}$$

§1.5 两矢量的矢量积

一、定义

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积是这样的一个矢量 $\boldsymbol{c}$：

(1)矢量 c 的模等于以矢量 a,b 所组成的平行四边形面积，即

$$|c| = |a||b|\sin(a\hat{,}b)$$

(2) 矢量 c 同时垂直于矢量 a 和 b，因而矢量 c 垂直于矢量 a 和 b 所决定的平面。

(3)矢量 c 的正向按“右手法则”来确定。

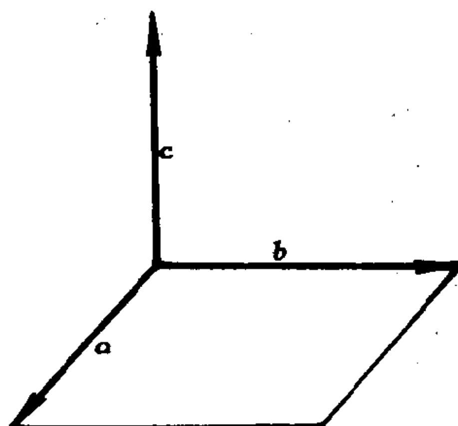


图 1—8

矢量 a 与 b 的矢量积，用记号 $a\times b$ 表示，即

$$c = a \times b$$

二、矢量积的基本性质

1. 两个非零矢量 a,b 平行的充要条件是两矢量的矢量积为零，即

$$a \times b = 0$$

事实上，若 $a /\!/ b$ 时，$(a\hat{,}b) = 0$ 或 π，这时 $\sin(a\hat{,}b) = 0$，故得 $a \times b = 0$。

反之，当 $a \times b = 0$ 而 $|a| \neq 0, |b| \neq 0$ 时由

$$|a||b|\sin(a\hat{,}b) = 0$$

推得

$$\sin(a\hat{,}b) = 0$$

从而

$$(a\hat{,}b) = 0 \quad 或 \quad \pi$$

所以

$$a /\!/ b$$

2. 由矢量积的定义得

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$$

这说明矢量积不满足交换律，并且当矢量积的因子交换时变号。

3. 由矢量积的定义易证

$$(m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = m(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (m\boldsymbol{b})$$

即标量积的乘数可以提出放在矢量积记号外面。

4. 矢量积满足分配律，即

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$$

（证明从略）。

三、矢量积的投影表示法

将上面研究的结果应用到基本单位矢量的矢量积可得

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0, \qquad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = 0, \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0 \qquad (1\text{—}14)$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = -(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = -(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = -(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{j} \qquad (1\text{—}14')$$

设 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ 和 $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \times (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_xb_x(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}) + a_xb_y(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) + a_xb_z(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}) \\ &\quad + a_yb_x(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}) + a_yb_y(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}) + a_yb_z(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}) \\ &\quad + a_zb_x(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}) + a_zb_y(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j}) + a_zb_z(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}) \end{aligned}$$

注意由式(1—14)，(1—14′)得到

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\boldsymbol{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\boldsymbol{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\boldsymbol{k} \qquad (1\text{—}15)$$

或应用三阶行列式，则上式可表示为：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1\text{—}16)$$

§1.6 混　合　积

现在我们来讨论三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的各种不同形式的乘积。两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的标量积 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$，然后把所得结果与第三个矢量 $\boldsymbol{c}$ 作标量和矢量的乘积，结果得 $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ 是一个与 $\boldsymbol{c}$ 共线的矢量。两个矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的矢量积 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$，然后再与矢量 $\boldsymbol{a}$ 作标量积或矢量积，结果得 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ 或 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$，前者称为混合积，后者称为二

重矢积。

首先研究三个矢量的混合积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 的几何意义。由矢量

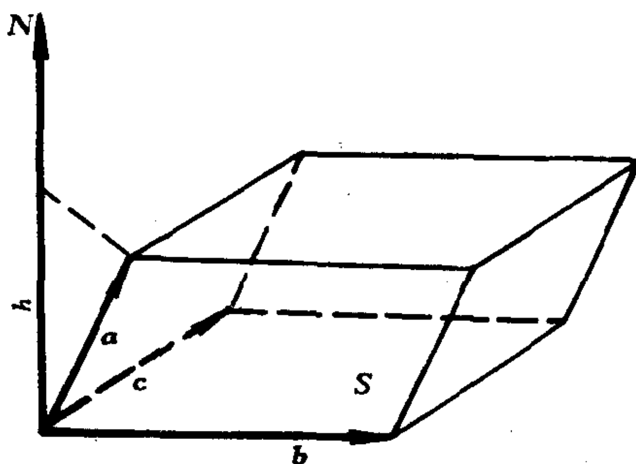


图 1—9

积的定义可知，矢量积 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{N}$ 的模等于由矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 作成的平行四边形的面积 S，但是

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{N}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{N}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{N}})=|\boldsymbol{N}|\mathrm{prj}_{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{a}$$

于是推知，这个乘积可以考虑作上述平行四边形的面积 $|\boldsymbol{N}|$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 在矢量 $\boldsymbol{N}$ 上的投影的乘积，其中方向 $\boldsymbol{N}$ 垂直于这平行四边形所在的平面，就是说，标量积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 表示由矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 作成的平行六面体的体积。它的符号依赖于坐标轴的转向。

若三矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共面，则平行六面体的体积为零，就是说，在这种情形下

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$$

反之，如果 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$，则根据标量积的定义可知，或 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 中至少有一为零矢量，或 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行，或 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，不论那一种情况，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都是共面的。

由此可得，三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共面的必要且充分条件是：它们的混合积为零。

如果已知三个矢量的投影式是

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}\qquad \boldsymbol{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}\qquad \boldsymbol{c}=\{c_x,\ c_y,\ c_z\}$$

则

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

再由两矢量的标量积的投影表示式，得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a_x\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} \qquad (1—17)$$

根据上面所得的结果和行列式的性质容易推得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$$

$$=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})$$

$$=-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$$

例如

$$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

余仿此得证。

§1.7 二重矢积

三个矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的二重矢量积 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 是一个矢量，它垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，因此它位于矢量 $\boldsymbol{b}$ 与矢量 $\boldsymbol{c}$ 的平面且垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的平面，即它在这两个平面的交线上，记这矢量为 $\boldsymbol{d}$，于是

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$ 现计算矢量 $\boldsymbol{d}$ 在三个坐标轴上的投影，根据式(1—15)得

$$d_x=a_y[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]_z-a_z[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]_y$$

$$=a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)$$

$$=a_yb_xc_y-a_yb_yc_x-a_zb_zc_x+a_zb_xc_z$$

$$=a_yb_xc_y-a_yb_yc_x-a_zb_zc_x+a_zb_xc_z+a_xb_xc_x-a_xb_xc_x$$

$$= b_x(a_y c_y + a_z c_z + a_x c_x) - c_x(a_y b_y + a_z b_z + a_x b_x)$$

$$= b_x(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - c_x(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

同样可得

$$d_y = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})b_y - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})c_y$$

$$d_z = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})b_z - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})c_z$$

因此

$$\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

即

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \qquad (1—18)$$

仿此可得

$$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \qquad (1—19)$$

$$\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \qquad (1—20)$$

在式(1—18)中，令 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$ 则有

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$$

或

$$\boldsymbol{b} = \frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})}$$

令

$$\boldsymbol{b}' = \frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{b}'' = \frac{\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})}$$

得

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{b}''$$

显然，矢量 $\boldsymbol{b}'$ 平行于矢量 $\boldsymbol{a}$，而矢量 $\boldsymbol{b}''$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$，于是我们得到矢量 $\boldsymbol{b}$ 沿平行于以及垂直于给定的矢量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向的分解法。

第二章　矢函数的微分和积分

这一章里，我们要介绍矢函数的基本概念：函数、极限、函数的导数和积分等。

§2.1　矢函数、矢端曲线

矢量和数量一样都可能是常量或是变量。凡可取得不同矢"值"的矢量称为变矢量；凡保持同一矢"值"的矢量称为常矢量。变矢量可用模及方向都变动的变矢来表示，变矢量在坐标轴上的投影是变量。常矢量在坐标轴上的投影是常量。变矢量的典型例子是非等速及非直线运动中的速度。

现在我们要引进矢函数的概念，仿普通（数性）函数的概念，矢函数的定义是：若在空间某域 D 中的点 P 的每个位置对应着矢量 $\boldsymbol{a}$ 的一个确定"值"（模和方向），那么矢量 $\boldsymbol{a}$ 就称为在域 D 中点 P 的函数，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(p)$，当点用其坐标 x,y,z 表示时，记号可写成 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,y,z)$，这时称 $\boldsymbol{a}$ 是数性变量 x,y,z 的矢函数。在微积分中我们所介绍过的普通（数性）函数，它的自变量和因变量都是数性变量，而我们在这里所引进的矢函数它的自变量是数量，而因变量是矢量。

上面所讲的矢函数，取决于三个数性变量，同样矢函数也可能取决于两个或一个数性变量。矢函数中最简单且常用的是一个数性变量的矢函数，在以后的讨论中我们主要讨论一个数性变量（通常指时间 t）的矢函数，记作

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t) \tag{2—1}$$

用矢量的投影表示法，这个矢函数可以写成

$$\boldsymbol{a}(t)=\{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\} \tag{2—2}$$

其中 $a_x(t),a_y(t),a_z(t)$ 都是数性变量大的数性函数。一个矢函数相当于三个数性函数。

由于本书所讲的矢量均指自由矢量，所以以后总是假定把 $\boldsymbol{a}(t)$ 的起点放在坐标原点；因此，当 t 在所给区间上变动时，$\boldsymbol{a}(t)$ 的终点——其坐标 $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ ——划出一条曲线 L，它的方程是下面三个参数方程：

$$x = a_x(t) \qquad y = a_y(t) \qquad z = a_z(t)$$

但是由于矢量 $\boldsymbol{a}(t)$ 的起点取在坐标原点，$\boldsymbol{a}(t)$ 实际上就是曲线 L 上点 M 的矢径 $\boldsymbol{r}$，故曲线可用矢量方程给出

$$\boldsymbol{r} = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) \tag{2—3}$$

曲线 L 称矢函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(t)$ 的矢端曲线（图 2—1），而原点称为矢端曲线的极。

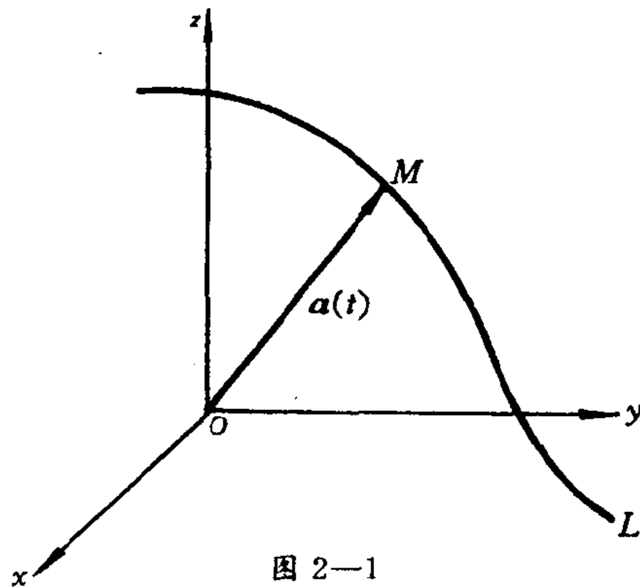


图 2—1

只改变模的大小，而方向不变的矢量，它的矢端曲线是通过极的射线（半直线）。只改变方向而其模不变的矢量，它的矢端曲线是位于以极点为中心的球上。

对于数性变量 t 的矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 也可以像普通（数性）函数一样定义它的极限、连续性及其它解析概念。

若对于任意给定的正数 ε，都存在数 $\delta > 0$，使得当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 的一切 t，都能满足不等式 $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}(t)| < \varepsilon$，则常矢量 $\boldsymbol{a}$ 称为当 $t \to t_0$ 时矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 的极限，记作

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a} \tag{2—4}$$

由于矢函数的极限定义和数性函数的极限定义完全类似，因此矢函数也就具有类似数性函数极限的运算规则。

仿数性函数连续性的定义，可得矢函数连续性的定义是：

若矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$在 t_0 的某领域内有定义，而且有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}(t_0) \tag{2—5}$$

则称 $\boldsymbol{a}(t)$在 $t=t_0$ 处连续。

若矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$在某区间 $(t_1\ t_2)$ 内的每一点处都连续，则称函数 $\boldsymbol{a}(t)$在区间 $(t_1\ t_2)$ 内连续。

§2.2 矢函数的导数和微分法

一、矢函数的导数

设矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 当数性变量 t 从 t_0 变到 $t_0+\Delta t(\Delta t\neq 0)$ 时，对应的矢函数的增量是

$$\Delta\boldsymbol{a}(t_0)=\boldsymbol{a}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t_0)$$

设数性变量 $t=t_0$ 时对应着函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 的矢端曲线 L 上的点 M_0，而 $t_0+\Delta t$ 仅在 $\Delta t>0$ 时对应着点 M'，在 $\Delta t<0$ 时对应着 M''（图 2—2）。于是，$\Delta\boldsymbol{a}(t_0)$ 便是矢量 $\boldsymbol{M_0M'}$ 或 $\boldsymbol{M_0M''}$。

取商式 $\dfrac{\Delta\boldsymbol{a}(t_0)}{\Delta t}$，因在 $\Delta t<0$ 时，矢量 $\Delta\boldsymbol{a}(t_0)=\boldsymbol{M_0M''}$ 与 t 的增加方向相反，但用负数 Δt 除后所得矢量 $\boldsymbol{M_0Q'}$ 的方向便跟 $\Delta t\to 0$ 时所得的矢量 $\boldsymbol{M_0Q'}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{a}(t_0)}{\Delta t}$ 同方向，而两者都对应矢端曲线上参数 t 的增加方向，当 $\Delta t\to 0$ 时，曲线 L 上的弦 M_0M'（或 M_0M''）趋于直线 M_0S 的位置，这个位置称 L 在点 M_0 处的切线。

由上讨论可知，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}$ 是矢量 $\boldsymbol{M_0T}$，它与矢量 $\boldsymbol{a}(t)$ 的矢端曲线 L 相切于其对应点 M_0 处，它的方向对应于 t 的增加方向。这个极限称为矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 对数性变量 t 的导数（简称导矢），且记作 $\boldsymbol{a}_0'(t)$ 或 $\dfrac{d\boldsymbol{a}(t_0)}{dt}$，即

$$\frac{d\boldsymbol{a}(t_0)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t_0)}{\Delta t} \tag{2—6}$$

二、微分法则

设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(t)$ 是矢函数，$\boldsymbol{c}$ 是常矢量，k 是常数，

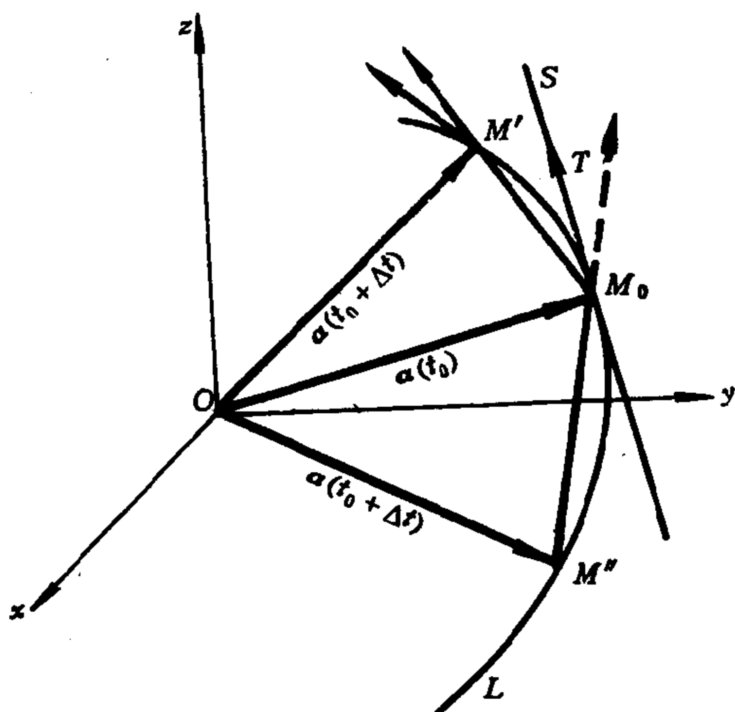


图 2—2

$u(t)$，$\varphi(t)$ 是数性函数，它们在某个区间内可导，则下面公式成立。

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{c})=0 \tag{2—7}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)+\boldsymbol{b}(t))=\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}+\frac{d\boldsymbol{b}(t)}{dt} \tag{2—8}$$

$$\frac{d}{dt}(k\boldsymbol{a}(t))=k\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt} \tag{2—9}$$

$$\frac{d}{dt}(u(t)\boldsymbol{a}(t))=\frac{du(t)}{dt}\boldsymbol{a}(t)+u(t)\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt} \tag{2—10}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t))=\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}\cdot\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{a}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{b}(t)}{dt} \tag{2—11}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t))=\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}\times\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{a}(t)\times\frac{d\boldsymbol{b}(t)}{dt} \tag{2—12}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(\varphi(t)))=\frac{d\boldsymbol{a}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \tag{2—13}$$

所有这些公式的证明与微积分中对应公式的证明完全一样，例如式(2—12)的证明如下：

$$\Delta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}\times\Delta\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$
$$=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$
$$=\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}$$

应用矢量积的性质可以得到

$$\frac{\Delta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\Delta t}=\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\times\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}$$

当 $\Delta t\to 0$，求极限；可得

$$\frac{d(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\right)+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\times\boldsymbol{b}\right)$$
$$+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\Delta\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\right)=\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}$$

例 1　定长矢量与其导矢互相垂直

证：　假定 $|\boldsymbol{a}(t)|=$ 常数

则有

$$\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)=|\boldsymbol{a}(t)|^2=\text{常数}$$

两端对 t 求导数得

$$2\boldsymbol{a}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}=0$$

这就说明，矢量 $\boldsymbol{a}(t)$ 和 $\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}$ 的数量积等于零，而这只有两者垂直时才有可能，故

$$\boldsymbol{a}(t)\perp\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}$$

在这种情况，其几何意义是很明显的，因为只改变方向而其模不变的矢量的矢端曲线是位于以极点为中心的球面上。又因为矢量的导数的方向与矢端曲线相切，亦即与球面相切，故必垂直于原来矢量，特别是对于单位矢量 $\boldsymbol{a}^0(t)$ 有 $\boldsymbol{a}^0(t)\perp\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}$。

例 2　求 $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}(t)\cdot(\boldsymbol{b}(t)\times\boldsymbol{c}(t))]$

解　注意公式(2—11)和(2—12)可得

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}(t)\cdot(\boldsymbol{b}(t)\times\boldsymbol{c}(t))]$$
$$=\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}\cdot(\boldsymbol{b}(t)\times\boldsymbol{c}(t))+\boldsymbol{a}(t)\cdot\frac{d}{dt}[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]$$

$$= \frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt} \cdot (\boldsymbol{b}(t) \times \boldsymbol{c}(t)) + \boldsymbol{a}(t) \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{b}(t)}{dt} \times \boldsymbol{c}(t)\right)$$

$$+ \boldsymbol{a}(t) \cdot \left(\boldsymbol{b}(t) \times \frac{d\boldsymbol{c}(t)}{dt}\right)$$

通常我们不必像上面那样把解析方法推广到矢函数上，因为用矢函数的投影表示法，我们就不难把矢函数的微分运算化为数性函数的微分运算，设

$$\boldsymbol{a}(t) = a_x(t)\boldsymbol{i} + a_y(t)\boldsymbol{j} + a_z(t)\boldsymbol{k}$$

可得

$$\Delta \boldsymbol{a}(t) = \Delta a_x(t)\boldsymbol{i} + \Delta a_y(t)\boldsymbol{j} + \Delta a_z(t)\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\Delta \boldsymbol{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta a_x(t)}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta a_y(t)}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta a_z(t)}{\Delta t}\boldsymbol{k}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，取极限得：

$$\boldsymbol{a}'(t) = a'_x(t)\boldsymbol{i} + a'_y(t)\boldsymbol{j} + a'_z(t)\boldsymbol{k} \qquad (2—14)$$

并且一般说来

$$\boldsymbol{a}^{(m)}(t) = a_x^{(m)}(t)\boldsymbol{i} + a_y^{(m)}(t)\boldsymbol{j} + a_z^{(m)}(t)\boldsymbol{k} \qquad (2—14')$$

由此可知，求矢函数的导数，可以化为求这矢量的分量的导数。

若曲线 L 的方程是 $\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$，其中 x, y, z 是 L 上的流动坐标，并用 S 表示曲线 L 的长度，则

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$$= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

据式(2—14)得

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \frac{dS}{dt} \qquad (2—15)$$

现在我们可以说出矢函数导数的全部特性：

数性变量 t 的矢函数的导数是一个矢量，它与所给矢量的矢端曲线相切，且指向 t 的增加方向，它的模等于矢端曲线的长度对于数性变量 t 的导数。

如果用矢端曲线的长度 S 作为数性变量 t，那么矢量导数的模总等于 1；也就是，曲线上点的矢径对于曲线长度的导数 $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 乃是与曲线相切且长度为 1 的矢量。

三、速度和加速度的分解法

设质点 M 在空间曲线 L 上移动，L 的矢量方程是

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

而 t 是时间，那么矢量 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{MM'}$ 表示动点在 Δt 时间内的位移，

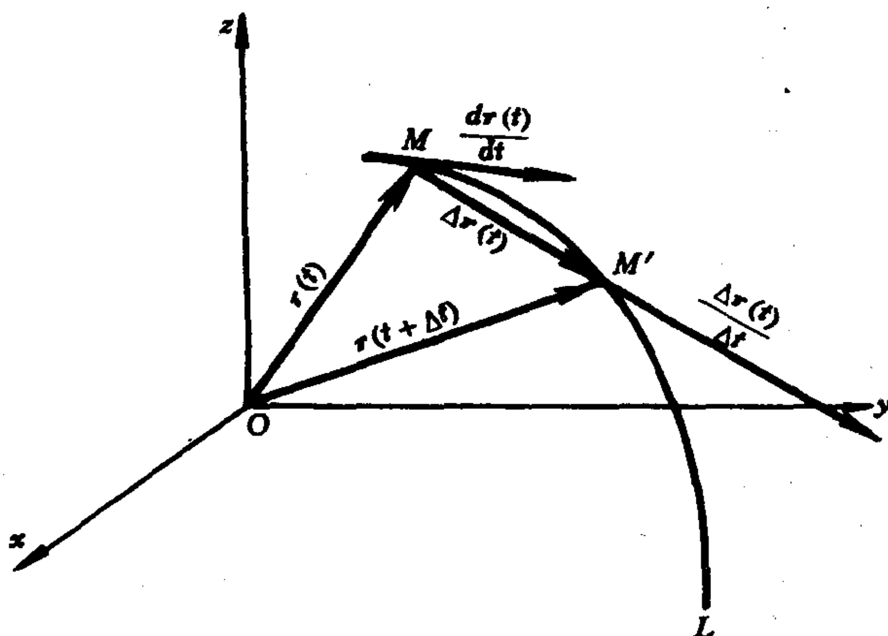


图 2—3

而 $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 是在这时间间隔内位移的平均速度。当 $\Delta t\to 0$ 求平均速度的极限就可以得到在时刻 t 的瞬时速度 $\boldsymbol{v}(t)$。因此质点 M 运动的速度矢 $\boldsymbol{v}(t)$是轨线的矢径对时间 t 的导数：

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \qquad (2—16)$$

它的模等于

$$|\boldsymbol{v}(t)|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

或由式(2—15)得

$$|\boldsymbol{v}(t)|=\frac{ds}{dt}$$

另外，由导矢的几何意义知：速度 $\boldsymbol{v}$ 是在轨线点 M 处的切线上，其方向指向 t 增加方向，若切线方向上的单位矢量用 $\boldsymbol{\tau}_1$ 表示，那么，速度矢量又可以表示成：

$$v=|v|\tau_1=\frac{ds}{dt}\tau_1 \qquad (2-17)$$

质点 M 运动的速度矢量的导数称之为加速度矢量，记作 $w(t)$，于是

$$w(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2r(t)}{dt^2} \qquad (2-18)$$

即加速度矢量为矢径对时间 t 的二阶导数。矢函数 $r(t)$ 的二阶导数 $\frac{d^2r(t)}{dt^2}$ 可以从矢量 $r(t)$ 的投影式经两次微分法而求得：

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}i+\frac{d^2y(t)}{dt^2}j+\frac{d^2z(t)}{dt^2}k$$

但是，如果从式子

$$r'(t)=|r'(t)|\tau_1 \qquad (2-17')$$

出发，其中 τ_1 是矢端曲线 $r=r(t)$ 切线上的单位矢量，则可把二阶导数表示成另一种形式。

微分式(2—17′)得

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}=\frac{dr'(t)}{dt}=\frac{d|r'(t)|}{dt}\tau_1+r'(t)|\frac{d\tau_1}{dt}| \qquad (2-19)$$

上式右端第一个分量 $w_t=\frac{d|r'(t)|}{dt}\tau_1$ 的方向是沿矢端曲线的切线方向，这个矢量称为切线加速度。第二个分量 $w_n=|r'(t)|\frac{d\tau_1}{dt}$ 的方向垂直于矢端曲线的切线方向，这个矢量称法线加速度。

切线加速度 w_t 的式子，可以改写作

$$w_t=\frac{d(r'(t))}{dt}\tau_1=\frac{d^2s}{dt^2}\tau_1 \qquad (2-20)$$

式中切线单位矢量的系数是 $\frac{d^2s}{dt^2}$，是运动的轨线长度对时间的二阶导数。

现在分析法线加速度 w_n 的式子，它可以改写为

$$w_n=|r'(t)|\frac{d\tau_1}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{d\tau_1}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left|\frac{d\tau_1}{ds}\right|v_1 \qquad (2-21)$$

其中 s 是轨线的长度，v_1 是与轨线切线方向垂直方向上的单位矢量。

在进一步讨论法线加速度的式子前，先讨论单位矢量的导数。

只变更方向单位矢 $a^0(t)$ （图 2—4）。那么 $|a^0(t+\Delta t)|=|a^0(t)|$，故 $\Delta OMM'$ 是等腰三角形，增量 $\Delta a^0(t)=MM'$，因此它

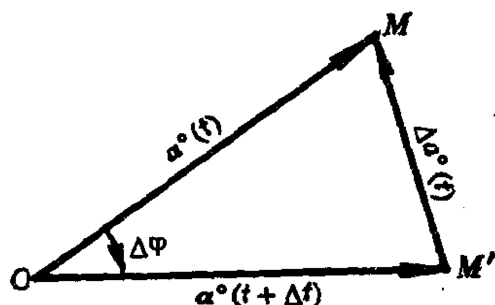


图 2—4

的模是：

$$|\Delta a^0(t)|=2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

矢函数 $a^0(t)$ 的导数的模是：

$$\left|\frac{da^0}{dt}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{d\varphi}{dt}\qquad(2—22)$$

应用式(2—22)可以得到

$$\left|\frac{d\tau}{ds}\right|=\frac{d\varphi}{ds}$$

像平面曲线的情况一样，量 $\frac{d\varphi}{ds}$ 称为曲线的曲率，用 $\frac{1}{R}$ 表示它，其中 R 是曲线的曲率半径。因此式(2—21)可写为

$$w_n=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 v_1\left|\frac{d\tau_1}{ds}\right|=\frac{|v|}{R}v$$

加速度矢量 w 便可以写成下面的形式

$$w=w_t+w_n=\frac{d|v|}{dt}\tau_1+\frac{|v|^2}{R}v_1$$

$$=\frac{d^2s}{dt^2}\tau_1^2+\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R}v_1\qquad(2—23)$$

四、二个数性变量的矢函数的微分法

多个数性变量的矢函数的定义，前面已经讲过，仿以前的定义可得两个数性变量的矢函数的定义如下：若 uv 平面上某域 D 中的点 P 的每一个位置对应着矢量 a 的一个确定“值”（模和方向），

那么矢量 $\boldsymbol{a}$ 就称为在域 D 上点 P 的函数，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u,v)$。

两个数性变量的矢函数 $\boldsymbol{a}(u,v)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}$ 用

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(u+\Delta u,\ v)-\boldsymbol{a}(u,\ v)}{\Delta u} \tag{2—24}$$

定义，$\dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}$ 也仿此定义。

从这个定义出发，仿前面一个变量的矢函数的证明，可以得到下面的结果。

若 $\boldsymbol{a}(u,v)=(a_x(u,v),a_y(u,v),a_z(u,v))$ 则

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}=\left(\frac{\partial a_x}{\partial u},\frac{\partial a_y}{\partial u},\frac{\partial a_z}{\partial u}\right) \tag{2—25}$$

设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u,v)$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(u,v)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}(u,v)$ 在平面某一区域的偏导数存在，则在该区域内下列公式成立。

$$\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{a}(u,\ v)+\boldsymbol{b}(u,\ v))=\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}+\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial u} \tag{2—26}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(c(u,\ v)\boldsymbol{a}(u,\ v))=\frac{\partial c}{\partial u}\boldsymbol{a}+c\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u} \tag{2—27}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{a}(u,\ v)\cdot\boldsymbol{b}(u,\ v))=\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial u} \tag{2—28}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{a}(u,\ v)\times\boldsymbol{b}(u,\ v))=\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial u}$$

例 3 设 $\boldsymbol{a}=e^{uv}\boldsymbol{i}+(3u+4v)\boldsymbol{j}+u\sin v\boldsymbol{k}$

求 $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial u^2}$；$\dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}$。

解

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}=ve^{uv}\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\sin v\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}=ue^{uv}\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+u\cos v\boldsymbol{k}$$

从而

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial u^2}=v^2e^{uv}\boldsymbol{i}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}=&(3u\cos v-4\sin v)\boldsymbol{i}\\&+(ue^{uv}\sin v-uve^{uv}\cos v)\boldsymbol{j}\\&+(4ve^{uv}-3ue^{uv})\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

§2.3 矢函数的积分

一、不定积分

若 $\boldsymbol{b}'(t)=\boldsymbol{a}(t)$ 则称 $\boldsymbol{b}(t)$是 $\boldsymbol{a}(t)$的一个原函数，$\boldsymbol{a}(t)$的原函数的全体，称为 $\boldsymbol{a}(t)$ 的不定积分，记为 $\int \boldsymbol{a}(t)dt$。和数性函数一样，若已知 $\boldsymbol{b}(t)$是 $\boldsymbol{a}(t)$的一个原函数，则有

$$\int \boldsymbol{a}(t)dt=\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{c} \tag{2—29}$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是任意常矢量。

设 $\boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{b}(t)$是矢函数，$\boldsymbol{c}$ 是常矢量，k 是常数，应用矢函数导数的基本性质，容易证明和数性函数不定积分相仿的矢函数不定积分的基本性质：

$$\int k\boldsymbol{a}(t)dt=k\int \boldsymbol{a}(t)dt \tag{2—30}$$

$$\int \boldsymbol{c}\cdot \boldsymbol{a}(t)dt=\boldsymbol{c}\cdot \int \boldsymbol{a}(t)dt \tag{2—31}$$

$$\int \boldsymbol{c}\times \boldsymbol{a}(t)dt=\boldsymbol{c}\cdot \int \boldsymbol{a}(t)dt \tag{2—32}$$

$$\int (\boldsymbol{a}(t)+\boldsymbol{b}(t))dt=\int \boldsymbol{a}(t)dt+\int \boldsymbol{b}(t)dt \tag{2—33}$$

若 $\boldsymbol{a}(t)=(a_x(t),a_y(t),a_z(t))$ 则

$$\int \boldsymbol{a}(t)dt=\left(\int a_x(t)dt,\int a_y(t)dt,\int a_z(t)dt\right) \tag{2—34}$$

由式(2—34)可知，求矢函数的不定积分，可化为求这个矢函数在各坐标轴分量的不定积分。

二、定积分

和数性函数的定积分概念完全类似，矢函数定积分的定义是：设矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 在区间 $[T_1,T_2]$ 上连续，则 $\boldsymbol{a}(t)$ 在区间 $[T_1,T_2]$ 上的定积分是指下列和式的极限：

$$\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{a}(t)dt=\lim\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}(\xi_i)\Delta t_i \tag{2—35}$$

其中 $T_1=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_n=T_2$，$\xi_i$ 是区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上的一个点，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$。

矢函数的定积分也有和数性函数定积分相类似的性质，例如，

若 $b(t)$ 是 $a(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的一个原函数，则

$$\int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{a}(t)dt = \boldsymbol{b}(T_2) - \boldsymbol{b}(T_1) \tag{2—36}$$

若 $\boldsymbol{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$

则

$$\int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{a}(t)dt = \left(\int_{T_1}^{T_2} a_x(t)dt, \int_{T_1}^{T_2} a_y(t)dt, \int_{T_1}^{T_2} a_z(t)dt\right) \tag{2—37}$$

例 4 用 t 表示时间，若质点运动的方程是 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，则其速度 $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$，加速度 $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$，当质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = (6\cos t,\ 4\sin t,\ e^{-t})$$

时，求 $\boldsymbol{r}(t)$ 与 $\boldsymbol{v}(t)$。其中 $\boldsymbol{r}(0) = 0, \boldsymbol{v}(0) = 0$。

解

$$\boldsymbol{v} = \int \boldsymbol{a}dt = \left(6\int \cos t dt,\ 4\int \sin t dt,\ \int e^{-t}dt\right)$$

$$= (6\sin t + c_1,\ -4\cos t + c_2,\ -e^{-t} + c_3)$$

由于 $\boldsymbol{v}(0) = 0$ 因而 $c_1 = 0, c_2 = 4, c_3 = 1$ 即

$$\boldsymbol{v} = (6\sin t,\ -4\cos t + 4,\ -e^{-t} + 1)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{v}dt$$

$$= \left(\int 6\sin t dt,\ \int (-4\cos t + 4)dt,\ \int (-e^{-t} + 1)dt\right)$$

$$= (-6\cos t + k_1,\ -4\sin t + 4t + k_2,\ e^{-t} + t + k_3)$$

由于 $\boldsymbol{r}(0) = 0$ 因而 $k_1 = 6, k_2 = 0, k_3 = -1$，于是

$$\boldsymbol{r} = (-6\cos t + 6,\ -4\sin t + 4t,\ e^{-t} + t + 1)。$$

第三章　场　论

场是物理现象中物理量与空间关系的一种表现形式，场的概念是矢量分析的基础。若空间(或空间的某一区域)每一点对应着某一数量，则称为给定了一个标量场；若空间(或空间的某一区域)每一点对应着某一矢量，则称为给定了一个矢量场。与时间无关的场称为稳定场，或时不变场，如静电场，恒定电流磁场等等；与时间有关的场称为不稳定场或时变场，如交变电磁场等等。

我们在本章里讨论的主要内容是：梯度、散度和旋度及其计算方法；高斯定理和斯托克斯定理及其应用等。

§3.1　标量场的方向导数和梯度

一、标量场的等值面

标量场的特征是数性量，在标量场里的任一点，我们可用一数量 ω 来表示该点的物理量，即

$$\omega = f(p) = f(x, y, z) \tag{3—1}$$

由此可见，标量场可以表示成一个函数的形式。在标量场里，$f(x, y, z)$ 等于常数的曲面称为等值面，即

$$f(x, y, z) = c(\text{常数}) \tag{3—2}$$

令 $c = c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n, \cdots$，则得一系列的等值面，它们充满了整个空间并互不相交。通过场里每一点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的等值面方程为

$$f(x, y, z) = c_0$$

若 $f(x, y, z)$ 是一个单值函数，则场里每一点只对应着函数的一个数值，即经过场里的每一点只有一个等值面。

例如，位于坐标原点的点电荷 q 产生的电位函数为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{3—3}$$

式中 r 是原点到观察点的距离，即

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

电位函数的等位面方程为

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=c$$

于是

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 c}{q}\right)^2 \qquad (3\text{—}4)$$

式(3—4)代表以电荷 q 所在点为中心的一个球面。

二、标量场的方向导数

数性函数 $f(x,y,z)$ 的一阶偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$\frac{\partial f}{\partial z}$ 分别代表在 x,y,z 轴方向的变化率。在实际问题里，我们还经常需要知道在其它方向的变化率，即需要讨论 $f(x,y,z)$ 在其它方向的导数。

定义 设标量场 $f(P)$ 里 P_0 点的位置矢量（即矢径）为 $\boldsymbol{R}_0$，我们从 P_0 点引射线 l，它的单位矢量记为 $\boldsymbol{l}^0$，方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，即

$$\boldsymbol{l}^0=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k} \qquad (3\text{—}5)$$

在 $\boldsymbol{l}^0$ 方向靠近 P_0 点的地方任取一点 $P(x,y,z)$，P 点的位置矢量为 $\boldsymbol{R}$（图 3—1），这时

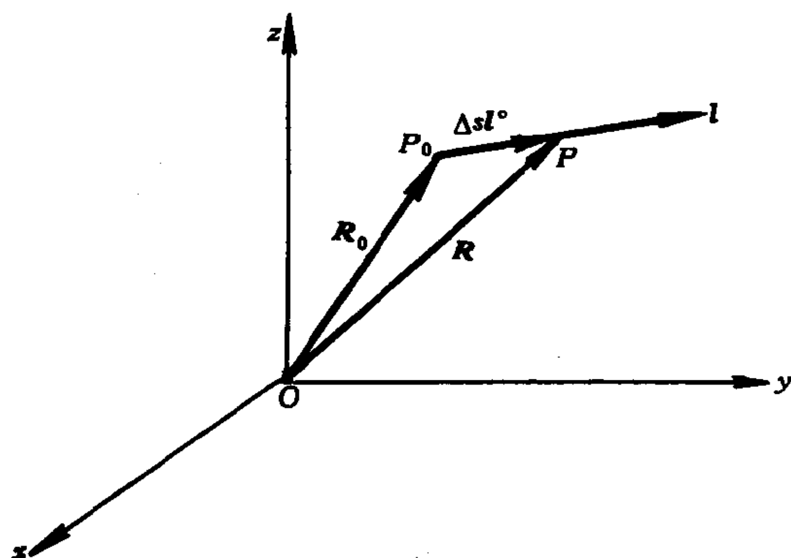


图 3—1

$$\overrightarrow{P_0P}=\Delta s\boldsymbol{l}^0$$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_0+\Delta s\boldsymbol{l}^0$$

当 $P\to P_0$ 时，若

$$\frac{\Delta f}{\Delta s}=\frac{f(P)-f(P_0)}{P_0P}$$

的极限存在，则该极限称为函数 $f(P)$ 在 P_0 点沿 l 方向的方向导数，记为

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta f(P_0)}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta s} \tag{3—6}$$

式中

$$x=x_0+\Delta s\cos\alpha,\qquad y=y_0+\Delta s\cos\beta$$
$$z=z_0+\Delta s\cos\gamma$$

由此可见，方向导数代表数性函数 $f(P)$ 在某点沿某方向的变化率。当 $\frac{\partial f}{\partial s}>0$ 时，函数 $f(P)$ 沿 l 方向增加；当 $\frac{\partial f}{\partial s}<0$ 时，函数 $f(P)$ 沿 l 方向减小。

若 $f(P)$ 在 P_0 点可微，则

$$\Delta f(P_0)=\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\Delta s\cos\alpha+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\Delta s\cos\beta$$
$$+\frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\Delta s\cos\gamma+\varepsilon\Delta s \tag{3—7}$$

用式(3—7)除 Δs 得

$$\frac{\Delta f(P_0)}{\Delta s}=\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\cos\gamma+\varepsilon$$

当 $\Delta s\to 0$ 时，$\varepsilon\to 0$，因此

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial s}=\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\cos\gamma \tag{3—8}$$

当 $\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2},\gamma=\frac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{i}$，式(3—8)简化成 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}$。同样，当 $\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{j}$ 或 $\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{k}$ 时，式(3—8)简化成 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}$ 或 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial z}$。

如果我们用一条通过 P_0 点的有向曲线 c 代替射线 l（图 3—2），令曲线 c 的矢量方程为

$$\boldsymbol{R}(s)=x(s)\boldsymbol{i}+y(s)\boldsymbol{j}+z(s)\boldsymbol{k} \tag{3—9}$$

式中 s 表示曲线的弧长。曲线 c 上的函数可以写成参变量 s 的函数形式：

$$f(s)=f[x(s),y(s),z(s)] \tag{3—10}$$

对 s 求导得

$$\frac{\partial f(s)}{\partial s}=\frac{\partial f(P)}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f(P)}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial f(P)}{\partial z}\frac{dz}{ds} \tag{3—11}$$

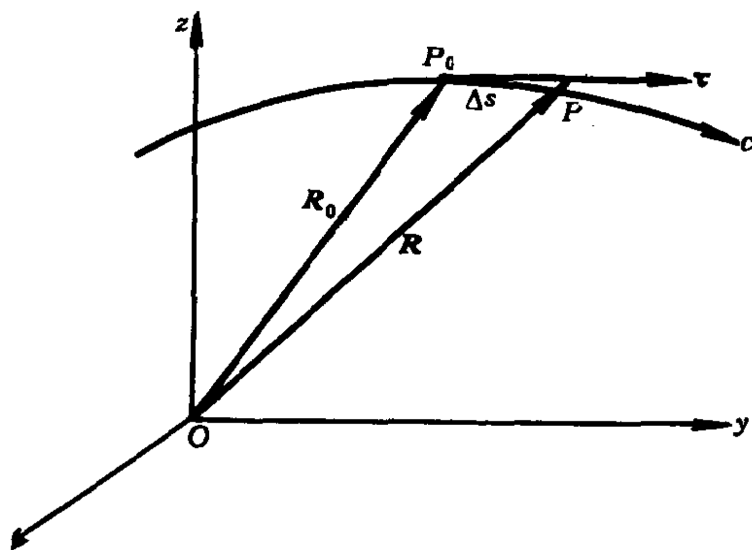


图 3—2

式中 P 是对应于参数 s 的点。因为式(3—11)中的 $\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}$ 是在曲线上 P 点的单位切线矢量 $\tau=\frac{d\boldsymbol{R}}{ds}$ 的三个坐标分量，即曲线 c 正向切线的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ （$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 分别是 P 点的切线矢量与 x,y,z 轴的夹角），所以式(3—11)是函数在 P 点沿正切线方向的方向导数。它代表沿曲线 c 切向单位弧长的变化率，并可按式(3—8)计算。

例 1 已知 $f(x,y,z)=2x^2+xy+yz^2$，试分别计算在 $P_0(1,-1,2)$ 点沿 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{A}_2=3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 两个方向的方向导数。

解

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x+y,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x+z^2,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=2yz$$

在 $P_0(1,-1,2)$ 点

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=5,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=-4$$

又

$$|\boldsymbol{A}_1|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$$

沿 $\boldsymbol{A}_1$ 方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{A}_1^0=\frac{\boldsymbol{A}_1}{|\boldsymbol{A}_1|}=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}-\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$$

所以

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=-\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{3}$$

将上述值代入式(3—8)得沿 A_1 方向的方向导数

$$\frac{df}{ds}=3\left(\frac{1}{3}\right)+5\left(\frac{-2}{3}\right)-4\left(\frac{2}{3}\right)=-5$$

同样

$$|A_2|=\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}=7$$

$$A_2^0=\frac{A_2}{|A_2|}=\frac{3}{7}\boldsymbol{i}+\frac{6}{7}\boldsymbol{j}-\frac{2}{7}\boldsymbol{k}$$

$$\cos\alpha'=\frac{3}{7},\quad \cos\beta'=\frac{6}{7},\quad \cos\gamma'=-\frac{2}{7}$$

$$\frac{df}{ds}=3\left(\frac{3}{7}\right)+5\left(\frac{6}{7}\right)+4\left(\frac{2}{7}\right)=6.71$$

例 2 已知平面场 $f(x,y)=x^2y+2\ln y$，试求在 $P_0(1,1)$ 点沿与正 x 轴成 30°方向的方向导数。

解 在 $P_0(1,1)$ 点

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=2,\quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=3$$

与 x 成 30°方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{l}^0=\cos 30^\circ\boldsymbol{i}+\sin 30^\circ\boldsymbol{j}$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial s}=2\cos 30^\circ+3\cos 30^\circ=\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

例 3 已知 $f=xy$，试求沿 $x^2+y^2=a^2$ 圆周反时针切线方向的方向导数(图 3—3)。

解法一 反时针取向的圆矢量方程为

$$\boldsymbol{R}(t)=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}\qquad (t\geqslant 0)$$

该圆的单位切线矢量为

$$\tau=\frac{\boldsymbol{R}'(t)}{|\boldsymbol{R}'(t)|}=-\sin t\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j}$$

方向余弦为

$$\cos\alpha=-\sin t,\quad \cos\beta=\sin\alpha=\cos t$$

代入式(3—8)得

$$\frac{\partial f}{\partial s}=y(-\sin t)+x\cos t$$

$$=y\left(-\frac{y}{a}\right)+x\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{x^2-y^2}{a}$$

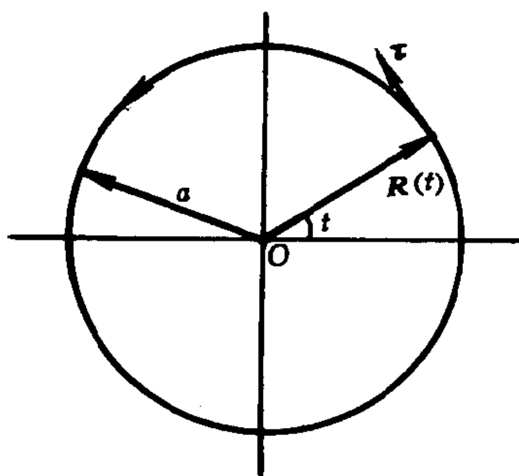


图 3—3

解法二 我们把圆的弧长表示为 $s = at$，而

$$x = a\cos t = a\cos\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$y = a\sin t = a\sin\left(\frac{s}{a}\right)$$

于是

$$f(s) = xy = a^2\cos\left(\frac{s}{a}\right)\sin\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{s^2}{2}\sin\left(\frac{2s}{a}\right)$$

$$\frac{df(s)}{ds} = \frac{a^2\cos\left(\frac{2s}{a}\right)}{2}\cdot\frac{2}{a} = a\cos\left(\frac{2s}{a}\right)$$

$$= \frac{a^2\cos^2\left(\frac{s}{a}\right) - a^2\sin^2\left(\frac{s}{a}\right)}{a} = \frac{x^2 - y^2}{a}$$

三、标量场的梯度

从例1看出，函数 $f(p)$ 在 P_0 点沿不同方向的变化率是不相同的。在标量场 $f(p)$ 中的任一点都有无限多个方向，那么在什么方向的变化率最大？这个最大的变化率是多少？这是讨论标量场的重要问题。

根据方向导数的计算式(3—8)，我们引入一个新矢量：

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{3—12}$$

$\boldsymbol{G}$ 的三个分量代表 f 在 P 点对 x, y, z 的偏导数。利用 $\boldsymbol{G}$，式（3—

8)可表示为

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{l}^0 = |\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{l}^0) \tag{3—13}$$

式(3—13)表明,$\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{l}^0$ 方向的投影等于函数 f 在该方向的方向导数。当 $\cos(\boldsymbol{G},\boldsymbol{l}^0) = 1$ 时,即 $\boldsymbol{G}$ 的方向与 $\boldsymbol{l}^0$ 方向一致时,方向导数为最大,因此 $\boldsymbol{G}$ 的方向代表函数 $f(p)$ 为最大变化率的方向。$\boldsymbol{G}$ 的模代表这个最大变化率的数值。矢量 $\boldsymbol{G}$ 被定义为标量场 $f(p)$ 在 P 点的梯度,记为

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{3—14}$$

梯度的模为

$$|\mathrm{grad}f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \tag{3—15}$$

当矢量 $\boldsymbol{l}^0$ 位于标量场 f 的等值面上时

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \mathrm{grad}f \cdot \boldsymbol{l}^0 = 0 \tag{3—16}$$

由于 f 不是常数,$\mathrm{grad}f$ 不为零,故标量场 f 的梯度方向必须垂直于等值面的切面,因此梯度指向等值面在 P 点的法线方向。等值面的单位法线矢量可表示为

$$\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{grad}f}{|\mathrm{grad}f|} \tag{3—17}$$

四、梯度的性质

设 f 和 h 是两个可微标量场,则

(1) $$\mathrm{grad}(f+h) = \mathrm{grad}f + \mathrm{grad}h \tag{3—18}$$

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(f+h) &= \frac{\partial}{\partial x}(f+h)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f+h)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f+h)\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} + \frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial h}{\partial z}\boldsymbol{k} \\ &= \mathrm{grad}f + \mathrm{grad}h\end{aligned}$$

(2) $$\mathrm{grad}(fh) = f\mathrm{grad}h + h\mathrm{grad}f \tag{3—19}$$

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(fh) &= \frac{\partial}{\partial x}(fh)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(fh)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(fh)\boldsymbol{k} \\ &= \left(f\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial f}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(f\frac{\partial h}{\partial y} + h\frac{\partial f}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(f\frac{\partial h}{\partial z} + h\frac{\partial f}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} \\ &= f\mathrm{grad}h + h\mathrm{grad}f\end{aligned}$$

(3) $$\text{grad} f(h) = f'(h)\text{grad} h \tag{3—20}$$

证明

$$\text{grad} f(h) = \frac{\partial f(h)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(h)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f(h)}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$= f'(h)\frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{i} + f'(h)\frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{j} + f'(h)\frac{\partial h}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$= f'(h)\text{grad} h$$

在矢量分析中，为了简化算式和便于记忆，经常使用符号法进行运算。为此引入一个微分算符∇，称为哈米尔顿算子，它代表如下的符号矢量：

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3—21}$$

∇算子本身并无实际意义，只起运算作用。利用∇算子，f的梯度可记为

$$\text{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{3—22}$$

梯度的性质可写成如下的形式：

$$\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h \tag{3—23}$$

$$\nabla(fh) = f\nabla h + h\nabla f \tag{3—24}$$

$$\nabla\left(\frac{f}{h}\right) = \frac{h\nabla f - f\nabla h}{h^2} \qquad (h \neq f) \tag{3—25}$$

$$\nabla f(h) = f'(h)\nabla h \tag{3—26}$$

例 4 已知常矢 $\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j}c_z\boldsymbol{k}$，$P$ 点的矢径为

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

试求($\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{R}$)的梯度。

解 因为

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{R} = c_x x + c_y y + c_z z$$

所以

$$\text{grad}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{R}) = \frac{\partial}{\partial x}(c_x x)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(c_y y)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(c_z z)\boldsymbol{k}$$

$$= c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k} = \boldsymbol{c}$$

此例表明，$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{R}$ 的梯度方向与 $\boldsymbol{c}$（常矢）的方向一致，即标积 $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{R}$ 的等值面是垂直于 $\boldsymbol{c}$ 的平面。

例 5 已知 $f(r) = r, \frac{1}{r}, r^n$，其中 r 是某点到原点的距离，试

求 $\mathrm{grad}f(r)$。

解 因为

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y},\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

由式(3—20)

$$\mathrm{grad}f(r)=\frac{df}{dr}\mathrm{grad}r=\frac{df}{dr}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{df}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{df}{dr}\boldsymbol{r}^0 \tag{3—27}$$

式中 $\boldsymbol{r}^0$ 是 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量。

当 $f(r)=r$ 时，$\frac{df}{dr}=1$

$$\mathrm{grad}r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{r}^0 \tag{3—28}$$

当 $f(r)=\frac{1}{r}$ 时，$\frac{df}{dr}=-\frac{1}{r^2}$

$$\mathrm{grad}\frac{1}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{3—29}$$

当 $f(r)=r^n$ 时，$\frac{df}{dr}=nr^{n-1}$

$$\mathrm{grad}r^n=nr^{n-2}\boldsymbol{r} \tag{3—30}$$

由式(3－29)，我们可以导出位于原点的点电荷 q 产生的电位梯度：

$$\mathrm{grad}\varphi=\mathrm{grad}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \tag{3—31}$$

式 (3—31) 也可以直接由梯度的定义得到，因为电位函数 φ 的等位面是以原点为中心的一个球面，球面的法线与半径方向一致，因此 $\mathrm{grad}\varphi$ 沿球的半径并指向 f 增加的方向，即指向中心。于是对法线的微分为

$$dn=-dr$$

因而

$$|\mathrm{grad}\varphi| = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

沿 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{r}^0 = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

故

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(-\boldsymbol{r}^0) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$$

如果把电位差的定义应用于相距 dl 的两点上，则

$$d\varphi = -\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

式中

$$d\boldsymbol{l} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k}$$

所以

$$d\varphi = -[E_x dx + E_y dy + E_z dz] \quad (3\text{—}32)$$

但 φ 是 x,y,z 的函数，故 $d\varphi$ 可写成全微分形式：

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \quad (3\text{—}33)$$

比较式(3—32)和(3—33)得

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

因此

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$= -\mathrm{grad}\varphi \quad (3\text{—}34)$$

例 6　已知金属球里的温度分布为 $f(r) = ar^2$，a 是一个正常数，试求其温度梯度。

解　由式(3—27)

$$\mathrm{grad}f(r) = \frac{df(r)}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = 2a\boldsymbol{r}$$

温度梯度方向($\boldsymbol{r}$)代表温度增加最快的方向。与其相反的方向(沿矢径指向原点)代表冷却最快的方向。

例 7　设 F_1 和 F_2 是两个焦点，动点 P 到 F_1 的距离为 r_1，到 F_2 的距离为 r_2，已知 $r_1 + r_2 = 2a$ 是函数 $\varphi = r_1 + r_2$ 的一条等值线，试证明在椭圆上所作的法线平分两矢径间的夹角(图 3—4)。

解

$$\mathrm{grad}\varphi = \mathrm{grad}r_1 + \mathrm{grad}r_2$$

由式(3—28)

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1^0$$

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2^0$$

因此

$$\mathrm{grad}\varphi = \boldsymbol{r}_1^0 + \boldsymbol{r}_2^0$$

式中 $\boldsymbol{r}_1^0$ 和 $\boldsymbol{r}_2^0$ 分别是从 F_1 和 F_2 到 P 点方向的单位矢径，它们的模都等于 1。矢量 $\mathrm{grad}\varphi$ 是 $\boldsymbol{r}_1^0$ 和 $\boldsymbol{r}_2^0$ 构成的平行四边形的对角线，它平分两边的夹角并指向等值面在 P 点的法线方向。

若在例 7 中的不是椭圆而是双曲线 $r_1 - r_2 = 2a$ ，或者是以坐标原点为焦点的抛物线，我们也能得到相同的结论。

椭圆、双曲线、抛物线等二次曲线的上述几何性质在光学等方面有重要的应用。

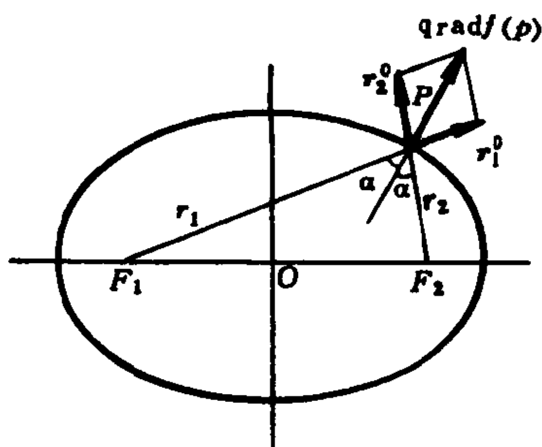


图 3—4

§ 3.2　矢量场的力线方程

矢量场的特征是矢性量，其数学式为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{A}(x, y, z) \tag{3—35}$$

其投影式为

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + A_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + A_z(x, y, z)\boldsymbol{k} \tag{3—36}$$

式中 A_x, A_y, A_z 都是 x, y, z 的数性函数。

从式(3—36)看出，三个数性函数可以完全确定一个矢量场。为了用图形直观地表示出一个矢量场，人们引入了力线(即矢量线)的概念。力线上每一点的切线方向与矢量在该点的方向一致。应当指出，力线在每一种矢量场里都有具体的物理意义，例如电场中的电力线，磁场中的磁力线等等。

一般说来，矢量场里的每一点都有且只有一条力线通过，所以力线充满了整个矢量场空间而且互不相交。力线只能表示出在各点的矢量方向，不能表示出模的大小。为了能够同时表示出矢量模的大小，通常是使通过垂直于矢量方向上单位面积的力线正比于该矢量的模，于是力线的稠密程度即代表矢量模的大小。

设矢量线上任一点的矢径为

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

因此

$$d\boldsymbol{R} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$$

它代表在 P 点与力线相切的矢量。按照定义，$d\boldsymbol{R}$ 应与 $\boldsymbol{A}$ 共线，所以

$$d\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{A} = 0$$

于是

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \qquad (3\text{—}37)$$

式(3—37)代表力线的微分方程。

例 1　试求位于原点的点电荷 q 产生的电力线方程。

解　由式(3—34)和(3—31)

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

将上式代入式(3—37)得电力线方程为

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

积分上式得

$$\ln x = \ln y + c$$

即

$$y = c_1 x$$

同样

$$z = c_2 y = c_2 c_1 x$$

由此可见，点电荷 q 的电力线是从点电荷所在点发出的一族射线。

例 2　试求载直流电流 I 的无限长导线产生的磁力线方程。

解　设载流导线位于 z 轴上（图 3—5），根据安培定律，电流

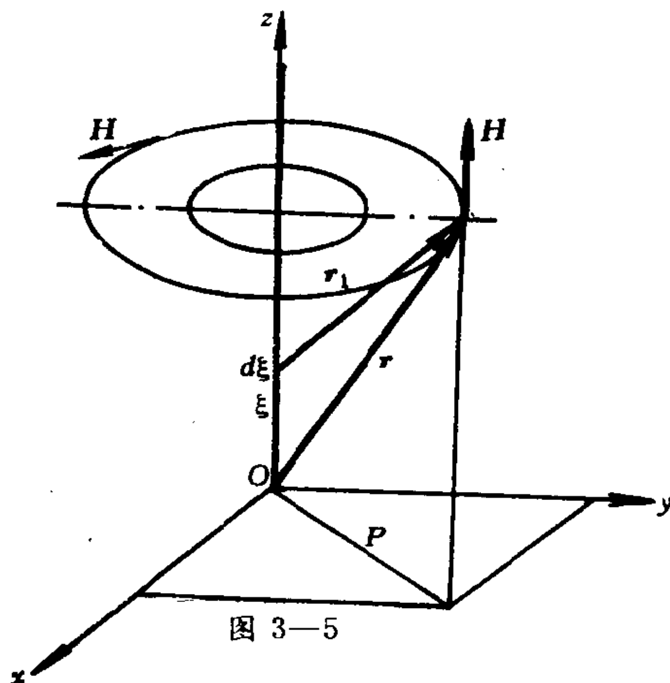


图 3—5

元 $Id\xi\boldsymbol{k}$ 在 $P(x,y,z)$ 点产生的磁场强度为

$$d\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi}\frac{I(d\xi\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_1)}{r_1^3}$$

整个载流导线产生的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I}{4\pi r_1^3}(d\xi\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_1)$$

又

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_1=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+(z-\xi)\boldsymbol{k}$$

$$|\boldsymbol{r}_1|=\sqrt{x^2+y^2+(z-\xi)^2}=\sqrt{\rho^2+(z-\xi)^2}$$

$$d\xi\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_1=-yd\xi\boldsymbol{i}+xd\xi\boldsymbol{j}$$

因此

$$\boldsymbol{H}=\frac{I}{4\pi}\Big\{-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yd\xi}{[\rho^2+(z-\xi)^2]^{3/2}}\boldsymbol{i}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xd\xi}{[\rho^2+(z-\xi)^2]^{3/2}}\boldsymbol{j}\Big\}$$

$$= \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{[\rho^2 + (z-\xi)^2]^{3/2}} (-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$$

由此可见，$\boldsymbol{H}$ 位于平行于 xy 的平面上。

设

$$\xi - z = \rho \operatorname{tg} t, \qquad d\xi = \frac{\rho}{\cos^2 t} dt$$

当 $\xi = \pm\infty$ 时，$t = \pm \frac{\pi}{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{[\rho^2 + (z-\xi)^2]^{3/2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho dt}{\cos^2 t [\rho^2 + \rho^2 \operatorname{tg}^2 t]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{\rho^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2 t \sec^3 t} = \frac{1}{\rho^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{2}{\rho^2}$$

所以

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\rho^2} (-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}) \tag{3—38}$$

将式(3—38)代入力线方程(3—37)得

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

为了使上式有意义，dz 必须等于零，即

$$z = c(\text{常数})$$

因此

$$xdx = -ydy$$

积分上式得

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c_1$$

即

$$x^2 + y^2 = 2c_1$$

由此可见，磁力线是中心在 z 轴且位于平行于 xy 平面上的一族同心圆。

§3.3 矢量场的线积分

一 线积分的定义

在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中，任取一连接 $P_0(\boldsymbol{R}_0)$ 和 $P_1(\boldsymbol{R}_1)$ 的光滑曲线 c，我们用 $\Delta\boldsymbol{R}$ 表示位于曲线 c 的切线上，以切点为始点而模 $|\Delta\boldsymbol{R}|$ 等于弧元 ΔR 的小矢量，作标积：

$$\Delta U = \boldsymbol{A} \cdot \Delta\boldsymbol{R} = A_\tau \Delta R$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 是 $\Delta\boldsymbol{R}$ 始点的矢量，A_τ 是 $\boldsymbol{A}$ 在切线 τ 上的投影。将所有曲线 c 的弧元 ΔR 叙列的标积相加，并使弧元数无限增加，而且使每一弧元各自趋于零，求它的极限即可得到积分

$$U = \int_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R} = \int_{P_0}^{P_1} \boldsymbol{A}(x, y, z) \cdot \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} dt \qquad (3\text{—}39)$$

U 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿曲线 c 的线积分。

因为

$$A_\tau(x, y, z) = \boldsymbol{A}(x, y, z) \cdot \boldsymbol{\tau}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ 是曲线 c 的单位切线矢量：

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{R}'(t)}{|\boldsymbol{R}'(t)|}$$

所以

$$\int_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R} = \int_{P_0}^{P_1} \left(\boldsymbol{A} \cdot \frac{\boldsymbol{R}'(t)}{|\boldsymbol{R}'(t)|}\right) \boldsymbol{R}'(t) dt$$

$$= \int_{P_0}^{P_1} (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\tau}) |\boldsymbol{R}'(t)| dt = \int_{P_0}^{P_1} A_\tau |d\boldsymbol{R}'|$$

式中

$$|d\boldsymbol{R}| = ds$$

因此

$$\int_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R} = \int_{P_0}^{P_1} A_\tau ds \qquad (3\text{—}40)$$

式(3—40)表明，矢量的线积分实际上代表矢量在曲线 c 的切线方向分量相对于弧长的积分。

若 $\boldsymbol{A}$ 代表作用于质点的力，曲线 c 代表质点的运动轨迹，则线积分(3—40)表示当质点从 P_0 点运动到 P_1 点时该力所作的功。

矢量沿闭合曲线的线积分称为该矢量沿此曲线的环流，记为

$$\oint_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R}$$

环流与积分的方向有关，通常规定沿反时针方向的积分为正。

若用 $\boldsymbol{A}$ 的投影式表示，则

$$\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{R}=A_x dx+A_y dy+A_z dz$$

因此

$$\int_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{R}=\int_c A_x dx+\int_c A_y dy+\int_c A_z dz \qquad (3-41)$$

用式(3—41)计算线积分时，常用单一参数的函数来表示在曲线上某点的坐标，从而把线积分变成一个简单的积分。

例 1 已知 $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$，试计算沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 一圈的环流。

解法一 在圆周上任一点的参数方程为(参见图 3—3)：

$$\boldsymbol{R}(t)=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j} \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

$$x(t)=a\cos t,\qquad y(t)=a\sin t$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=-a\sin t\boldsymbol{i}+a\cos t\boldsymbol{j}$$

当 t 从 0 增加到 2π 时，该点绕圆周一圈。在圆周上

$$\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=(-a\sin t\boldsymbol{i}+a\cos t\boldsymbol{j})\cdot(-a\sin t\boldsymbol{i}+a\cos t\boldsymbol{j})=a^2$$

代入式(3—39)得

$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{R}=\int_0^{2\pi} a^2 dt=2\pi a^2$$

解法二 利用式(3—41)

$$\int_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{R}=\int_c -y dx+\int_c x dy$$

把圆周上某点的坐标表示成参数 t 的函数：

$$x=a\cos t,\qquad y=a\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

$$dx=-a\sin t,\qquad dy=a\cos t$$

所以

$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{R}=\oint_c -y dx+\oint_c x dy$$

$$=\int_0^{2\pi} a^2 dt=2\pi a^2$$

解法三 沿曲线上半周积分时

$$y=\sqrt{a^2-x^2} \qquad (a\geqslant x\geqslant -a)$$

$$dy=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

沿曲线下半周积分时

$$y=-\sqrt{a^2-x^2} \qquad (-a\leqslant x\leqslant a)$$

$$dy=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

代入式(3—41)得

$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{R}=\oint_c -ydx+\oint_c xdy$$

$$=\int_a^{-a}-\sqrt{a^2-x^2}dx+\int_a^{-a}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$+\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx+\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=2\left[\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx+\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\right]$$

$$=\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a}$$

$$+\left[-x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a}=2\pi a^2$$

例 2 试计算力 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$ 使质点从 $P_0(0,0,0)$ 点沿曲线 $\boldsymbol{R}(t)=t\boldsymbol{i}+2t^2\boldsymbol{j}+3t^3\boldsymbol{k}$ 运动到 $P_1(1,2,3)$ 点时所作的功。

解 曲线的参数方程为

$$x=t, \qquad y=2t^2, \qquad z=3t^3 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

因此

$$\boldsymbol{F}=2t^3\boldsymbol{i}+6t^5\boldsymbol{j}+3t^4\boldsymbol{k}$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j}+9t^2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=2t^3+51t^6$$

力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=\int_0^1(2t^3+51t^6)dt=109/14=7.79$$

例 3 已知 $\boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}$，试计算积分路径分别为从点(0, 1)经点(1, 1)，点(1, 2)，点(0, 2)回到点(0, 1)的正方形和从点(0, 1)经点(1, 1)，点(1, 2)回到点(0, 1)的三角形的环流(图 3—6)。

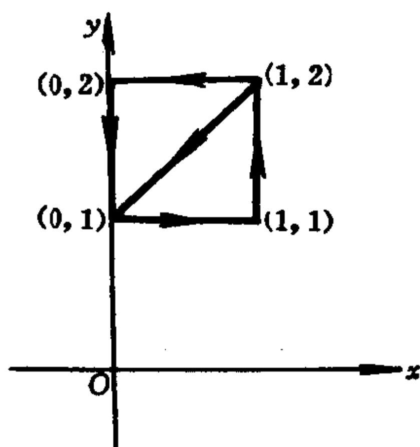


图 3—6

解 (1)计算沿正方形的环流

在垂直边上,$\boldsymbol{F}$ 与 $d\boldsymbol{R}$ 垂直,标积为零。在底边,$\boldsymbol{F}$ 与 $d\boldsymbol{R}$ 同向,标积为正;在下底,$\boldsymbol{F}$ 与 $d\boldsymbol{R}$ 反向,标积为负。于是

$$\oint_{\square} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{R} = \int_0^1 F_x(x,\ 1)dx + \int_1^0 F_x(x,\ 2)dx$$

$$= \int_0^1 xdx - \int_0^1 2xdx = -\frac{1}{2}$$

(2)计算沿三角形的环流

在斜边,$\boldsymbol{F}$ 与 $d\boldsymbol{R}$ 的夹角 $> \pi/2$,标积为负。

$$1 + x = y \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$\oint_{\triangle} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{R} = \int_0^1 F_x(x,\ 1)dx + \int_1^0 F_x(x,\ 1 + x)dx$$

$$= \int_0^1 xdx - \int_0^1 x(1 + x)dx$$

$$= -\int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{3}$$

注意:关于本例第二项的负值问题,我们可以把负号写在积分号外,积分限从 0 到 1;也可以使积分限与路径移动方向一致,即积分限从 1 到 0,负号包含在积分值内。但这两种方法一定不能同时用于一个算式里。

二 与积分路径无关的线积分

例 3 的结果表明,一般说来,矢量的线积分与连接 P_0 和 P_1 两点的积分路径有关。若矢量 $\boldsymbol{A}$ 的线积分值只与端点 P_0 和 P_1 有

关，而与连接该两点的曲线形状（即积分路径）无关，则将该积分称为与路径无关的线积分。

定理 1　梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 沿连接 $P_0(\boldsymbol{R}_0)$ 和 $P_1(\boldsymbol{R}_1)$ 两点的任一曲线 c 的线积分等于函数 φ 在 P_0 和 P_1 两点的值差。即

$$\int_c \mathrm{grad}\varphi \cdot d\boldsymbol{R} = \int_c d\varphi = \varphi(\boldsymbol{R}_1) - \varphi(\boldsymbol{R}_0)$$

$$= \varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_0, y_0, z_0) \qquad (3-42)$$

证明　假设

$$\mathrm{grad}\varphi = \boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$

即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = F_x, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = F_y, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = F_z$$

令

$$\boldsymbol{R}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

代表连接 P_0 和 P_1 两点的任一曲线 c 的参数方程，则

$$\int_c \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{R} = \int_c (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$= \int_c \mathrm{grad}\varphi \cdot d\boldsymbol{R} = \int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt$$

$$= \int_a^b \frac{d\varphi}{dt}dt = \int_a^b d\varphi = \varphi[\, x(t), y(t), z(t)]\,\Big|_a^b$$

$$= \varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_0, y_0, z_0)$$

证毕。

由此定理可得

推论 1　若 φ 是一单值函数，则 $\mathrm{grad}\varphi$ 的线积分与路径无关。

推论 2　$\mathrm{grad}\varphi$ 沿闭合路径的线积分等于零，即

$$\oint_c \mathrm{grad}\varphi \cdot d\boldsymbol{R} = 0 \qquad (3-43)$$

定理 2　若矢量 $\boldsymbol{A}$ 的线积分与积分路径无关，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 必为某一标函数 φ 的梯度。

证明　令 c_1 和 c 是连接 P_0 和 P_1 两点的两条不同的积分路径，由给定的条件：

$$\int_{c_1} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R} = \int_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R}$$

我们将 R_0 看成是一个常矢，由于积分与积分路径无关，故积分值

是 $\boldsymbol{R}$ 的函数，用 $\varphi(\boldsymbol{R})$表示为

$$\int_{R_0}^{R} A \cdot d\boldsymbol{R} = \varphi(\boldsymbol{R})$$

我们取与 P 点相邻的一点 P' $(\boldsymbol{R}+\Delta\boldsymbol{R})$，令 Δs 是 PP' 的长度，$\mathbf{s}$ 是 PP' 方向的单位矢量（图 3—7）。经过 P 点的线积分路径为 P_0PP'，则

$$\varphi(P') - \varphi(P) = \int_{PP'} A \cdot d\boldsymbol{R} = \int_{P_0PP'} A \cdot d\boldsymbol{R} - \int_{P_0P} A \cdot d\boldsymbol{R}$$

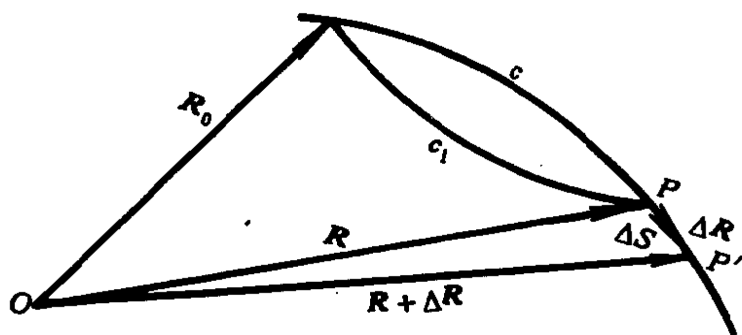


图 3—7

若取 PP' 为一直线，P_M 代表其上的一动点，du 代表此动点到 P 点的距离，则

$$d\boldsymbol{R} = \mathbf{s}du, \qquad \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{R} = A_s(M)du$$

因此

$$\int_{PP'} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{R} = \int_0^{\Delta s} A_s(M)du$$

由中值定理

$$\int_{PP'} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{R} = A_s(M')\Delta s$$

式中 M' 是线段 PP' 中间的一点，因此

$$\frac{\varphi(P') - \varphi(P)}{\Delta s} = A_s(M')$$

取极限 $\Delta s \to 0$ 得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = A_s(M)$$

根据梯度的定义

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\varphi \tag{3—44}$$

定理 3 若矢量 $\boldsymbol{A}$ 对任一矢径 $\boldsymbol{R}$ 的微分 $d\boldsymbol{R}$ 与标函数 φ 的关系为

$$d\varphi = \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R}$$

则

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\varphi \tag{3—45}$$

证明 函数 φ 的全微分为

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

而

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$d\boldsymbol{R} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$$

所以

$$\mathrm{grad}\varphi \cdot d\boldsymbol{R} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$d\varphi = \mathrm{grad}\varphi \cdot d\boldsymbol{R}$$

将上式代入给定的条件:

$$d\varphi = \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R} = \mathrm{grad}\varphi \cdot d\boldsymbol{R}$$

即

$$(\mathrm{grad}\varphi - \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{R} = 0$$

因为 $d\boldsymbol{R}$ 是一任意矢量,故

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\varphi$$

定义 若 $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\varphi$,$\varphi$ 是一单值函数,则矢量场 $\boldsymbol{A}$ 称为势量场(或位场、保守场)。

若令 $v = -\varphi$,则函数 v 称为势函数(或位函数),势量场 $\boldsymbol{A}$ 与位函数 v 间的关系为

$$\boldsymbol{A} = -\mathrm{grad}v \tag{3—46}$$

所以势量场是一个梯度场,它的势函数有无限多个,但它们之间只差一个常数。

例 4 已知 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (yz + e^x\cos y)\boldsymbol{i} + (xz - e^x\sin y)\boldsymbol{j} + (xy + 2z)\boldsymbol{k}$ 是一势量场,试求势函数 v。

解法一 因为

$$\mathrm{grad}\varphi = \boldsymbol{A}$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=A_x=yz+e^x\cos y\\\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=A_y=xz-e^x\sin y\\\frac{\partial\varphi}{\partial z}&=A_z=xy+2z\end{aligned}\right\}\tag{3—47}$$

对 x 积分得

$$\int\partial\varphi=\int(yz+e^x\cos y)dx$$

$$\varphi=xyz+e^x\cos y+f(y,z)\tag{3—48}$$

式中 $f(y,z)$ 是“积分常数”(因只对 x 变量积分)。将式(3—48)对 y 求导得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=xz-e^x\sin y+f'_y(y,z)\tag{3—49}$$

使式(3—49)与式(3—47)第二式相等得

$$f'(y,z)=0\tag{3—50}$$

式(3—50)表明 $f(y,z)$ 不随 y 变化，我 们 用 $f(z)$ 表示。于是式(3—48)变为

$$\varphi=xyz+e^x\cos y+f(z)$$

将上式对 z 求导并使之与式(3—47)第三式相等得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=xy+f'(z)=xy+2z$$

于是

$$f'(z)=2z$$

$$f(z)=z^2+c$$

式中 c 是任意常数。最后得

$$\varphi=xyz+e^x\cos y+z^2+c$$

势函数 $v=-\varphi$，即

$$v=-(xyz+e^x\cos y+z^2+c)$$

解法二 因为 $\boldsymbol{A}$ 是一势量场，所以在作 $\boldsymbol{A}$ 的线积分时，可将 P_0 点选择为坐标原点，积分路径沿 x 轴到点 $(x, 0, 0)$ 再沿平行于 y 轴的路径到点 $(x, y, 0)$，最后沿平行于 z 轴的路径从 $z=0$ 积分到 (x,y,z)，如图 3—8 所示。

由式(3—45)

$$\varphi(x,y,z)=\int_0^p d\varphi=\int_0^p\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{R}$$

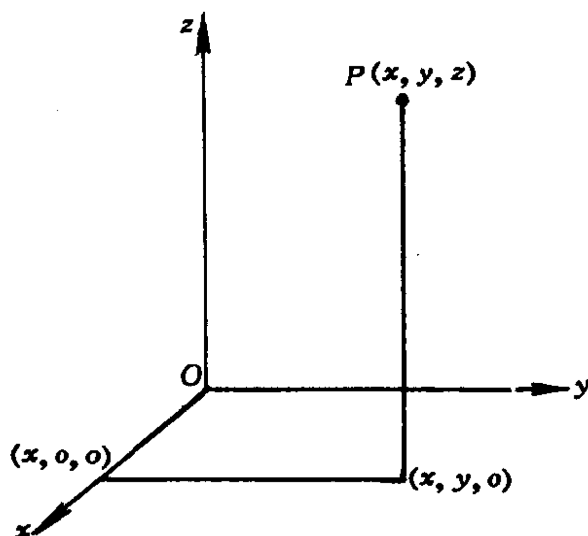


图 3—8

$$= \int_0^P (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

$$= \int_0^x A_x(x, 0, 0) dx + \int_0^y A_y(x, y, 0) dy$$

$$+ \int_0^z A_z(x, y, z) dz$$

将 A_x, A_y, A_z 代入上式得

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x e^x dx + \int_0^y - e^x \sin y dy + \int_0^z (xy + 2z) dz$$

$$= (e^x - 1) + e^x(\cos y - 1) + xyz + z^2$$

$$= xyz + e^x \cos y + z^2 - 1$$

与解法一比较得 $c = -1$。函数 $v = -\varphi$。

定理 4 若 $\boldsymbol{A}$ 沿任一闭合曲线的积分为零，则 $\boldsymbol{A}$ 必为一势量场。

证明 设积分路径为 $P_0P_1PP_2P_0$，则

$$\int_{P_0P_1P} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R} + \int_{PP_2P_0} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R} = 0$$

即

$$\int_{P_0P_1P} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R} = \int_{P_0P_2P} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R}$$

由定理 2，$\boldsymbol{A}$ 必为势量场。

注意：本定理要求 $\boldsymbol{A}$ 沿任一闭合曲线的积分都必须等于零。

例 5　试证明 $\boldsymbol{A}(x,y)=xy\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ 沿中心位于原点的所有圆的线积分为零，但 $\boldsymbol{A}$ 却不是势量场。

解　中心位于原点，半径为 a 的圆参数方程为

$$x=a\cos t,\qquad y=a\sin t\qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

因此

$$dx=-a\sin t\,dt,\qquad dy=a\cos t\,dt$$

$$\oint_O \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{R}=\oint_O(A_x dx+A_y dy)$$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t)(a\sin t)(-a\sin t)$$

$$+(a\sin t)(a\cos t)]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-a^3\cos t\sin^2 t+a^2\sin t\cos t)dt$$

$$=-a^3\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi}+a^2\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi}=0$$

如果我们把积分路径改为连接四个顶点(0，0)，(1，0)，(1，1)和(0，1)的正方形(沿反时针方向)，则

$$\oint_{\square}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{R}=\int_0^1 y\,dy+\int_1^0 x\,dx+\int_1^0 y\,dy=-\frac{1}{2}$$

由此可见，线积分与积分路径有关，$\boldsymbol{A}$ 不是势量场。

§3.4　矢量场的通量

一　有向曲面

在空间的任一双侧曲面（闭合的或非闭合的）s 上的每一点，我们都可以作一单位法线矢量 $\boldsymbol{n}$，如果 s 是闭合曲面，则规定外法线是正方向；如果 s 是非闭合曲面，则应该规定一侧为正方向，另一侧为负方向。凡是规定了正侧的曲面都称为有向曲面。如果曲面具有连续转动的法线，则称为光滑曲面。

曲面的隐式方程记为

$$f(x,y,z)=0\qquad(3\text{—}51)$$

若将变数 z 看成是另外两个变数 x,y 的函数，即

$$z=z(x,y)\qquad(3\text{—}52)$$

则式(3—52)是曲面 s 的显式。

例如单位球(半径为1)的隐式为

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$

而它的显式为

$$z=\pm\sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

曲面除上述两种表示法外，还有一种更有用的表示法，称为参数法。这种方法类似于用只含一个参数的三个参数方程来表示一条空间曲线，我们用含两个参数 u 和 v 的三个参数方程来表示曲面 s，即

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v) \qquad (3—53)$$

设式(3—53)的函数在 u,v 平面的某一区域 D^* 内有定义且连续。

式(3—53)的参数方程可以合成一个矢量方程：

$$\boldsymbol{R}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k} \qquad (3—54)$$

$\boldsymbol{R}$ 代表相应于在 D^* 域内点 (u,v) 在曲面 s 上的矢径。

同空间曲线一样，曲面的参数表示法并非唯一的，我们也可以用另外的参数 ξ,η 来代替 u,v，它们之间的关系为

$$\xi=\xi(u,v),\qquad \eta=\eta(u,v)$$

若在域 D^* 内

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}\neq 0$$

则从 u,v 平面到 ξ,η 平面的变换具有一一对应的关系。

设式(3—54)右边表示的函数在域 D^* 内连续可导，则在域 D^* 内直线 $v=v_0$ 的象是 s 面上的一条空间曲线 c_1，称为在该面上的 u 坐标曲线，而 $\partial\boldsymbol{R}(u,v_0)/\partial u$ 是与 u 坐标曲线相切的切线矢量。同样，$u=u_0$ 的直线是在 s 面上的 v 坐标曲线 c_2，它的切线矢量是 $\partial\boldsymbol{R}(u_0,v)/\partial v$。坐标曲线 c_1 和 c_2 相交于 s 面上的 P_0 点，与域 D^* 内的点 (u_0,v_0) 相对应(图 3—9)。

若

$$\frac{\partial\boldsymbol{R}(u_0,v_0)}{\partial u}\neq 0$$

并且

$$\frac{\partial\boldsymbol{R}(u_0,v_0)}{\partial v}\neq 0$$

则 $\dfrac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial u}$ 和 $\partial\boldsymbol{R}/\partial v$ 在 P 点决定了一个平面，此平面的单位法线矢量

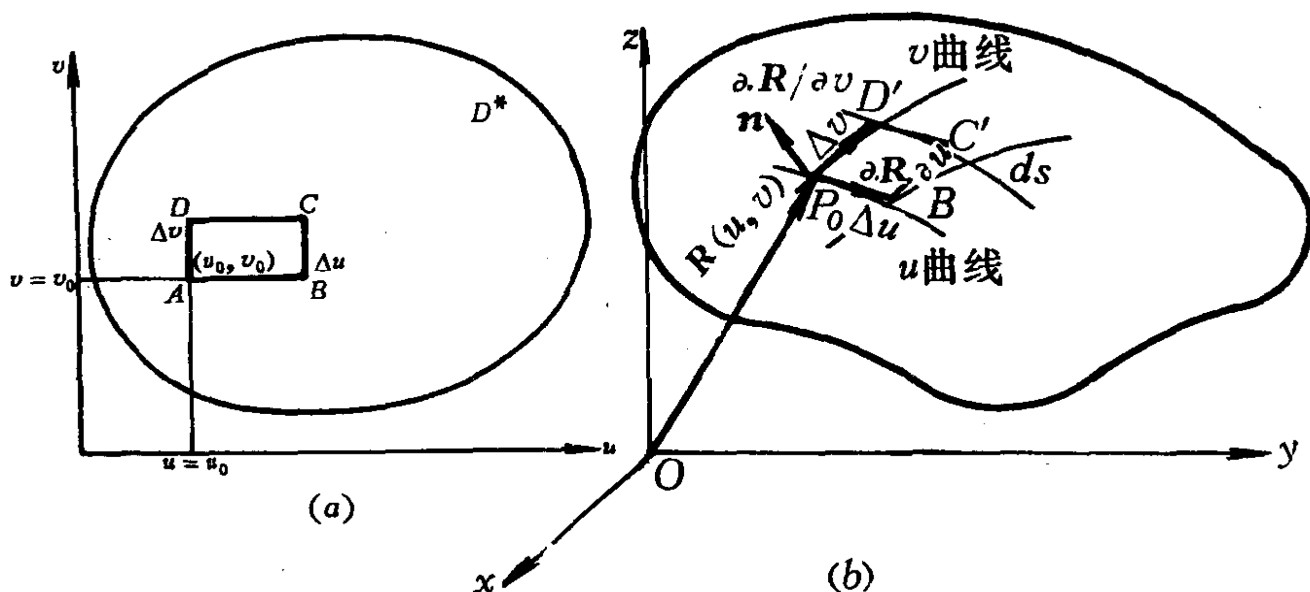


图 3—9

为

$$
\boldsymbol{n}=\frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{R}(u_0,\ v_0)}{\partial u}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{R}(u_0,\ v_0)}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{R}(u_0,\ v_0)}{\partial u}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{R}(u_0,\ v_0)}{\partial v}\right|} \tag{3—55}
$$

二　表面积

为了确定 s 的面积，我们将 s 看成是在条件(3—54)情况下域 D^* 的象。在域 D^* 内矩形 $ABCD$ 在 s 面上映象成曲线的平行四边形 $A'\ B'\ C'\ D'$，以 Δs 表示。该面积近似于边长为 $|\partial\boldsymbol{R}/\partial u|\Delta u$ 和 $|\partial\boldsymbol{R}/\partial v|\Delta v$ 所构成的平行四边形的面积（见图 3—9）。为了证明这一点，当 v 固定时，我们把参数 u 想象成时间，这时 $\partial\boldsymbol{R}/\partial u$ 代表速度矢量，而 $|\partial\boldsymbol{R}/\partial u|\Delta u$ 代表在 Δu 时间内 A' 点沿坐标曲线运动的距离，它近似 Δs 的边长 $A'\ B'$。同样，$|\partial\boldsymbol{R}/\partial v|\Delta v$ 近似于边长 $A'\ D'$。于是

$$
\Delta s=\left|\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial u}\Delta u\times\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial v}\Delta v\right|=\left|\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial v}\right|\Delta u\Delta v
$$

积分得

$$
s=\iint_{D^*}\left|\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial v}\right|du\,dv=\iint_{D^*}ds \tag{3—56}
$$

式中

$$ds = \left|\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}\right| du dv$$

称为表面积元。

例 1 试计算半径为 a，中心位于原点的圆球面积。

解 以 θ 和 φ 表示的圆球面参数方程为

$$x = a\sin\theta\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = a\cos\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$$

矢量方程为

$$\boldsymbol{R}(\theta, \varphi) = a\sin\theta\cos\varphi \boldsymbol{i} + a\sin\theta\sin\varphi \boldsymbol{j} + a\cos\theta \boldsymbol{k}$$

于是

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \theta} = a\cos\varphi\cos\theta \boldsymbol{i} + a\sin\varphi\cos\theta \boldsymbol{j} - a\sin\theta \boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \varphi} = -a\sin\theta\sin\varphi \boldsymbol{i} + a\sin\theta\cos\varphi \boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \varphi} = \Big[a^4\sin^4\theta + a^4\cos^4\varphi\cos^2\theta\sin^2\theta$$
$$+ 2a^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta + a^4\sin^4\varphi\cos^2\theta\sin^2\theta\Big]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left[a^4\sin^4\theta + (a^2\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta + a^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left[a^4\sin^4\theta + a^4\cos^2\theta\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}} = a^2\sin\theta$$

由式(3—56)

$$s = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} a^2\sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi a^2$$

定理 1 任一闭合面的面积矢量等于零，即

$$\oint\!\!\!\oint_s d\boldsymbol{s} = 0 \qquad (3—57)$$

证明 首先证明本定理对于四面体成立，然后将一个多面体分成很多个四面体，于是多面体各面的矢量和加上因分解成四面体而增加的各个面积矢量和也应等于零。但是，这些增加的面必然是两个四面体的公共面，当我们取正法线时，对于一个四面体是某一方向，则另一四面体的方向必与前一四面体的方向相反，因此这些面积矢量和恒等于零，即闭合多面体各面的矢量和等于零。最后把多面体推广到任意闭合曲面，我们作该曲面的内接多面体，在极限情况下，闭合曲面的面积矢量等于多面体的面积矢量，即等

于零。

根据上述分析，只要我们证明四面体的面积矢量和等于零即证明了本定理成立。

我们将四面体投影到任一平面上，例如 xy 平面，它的形状只可能是图 3—10 所示的两种之一。投影后得到的每个三角形都可

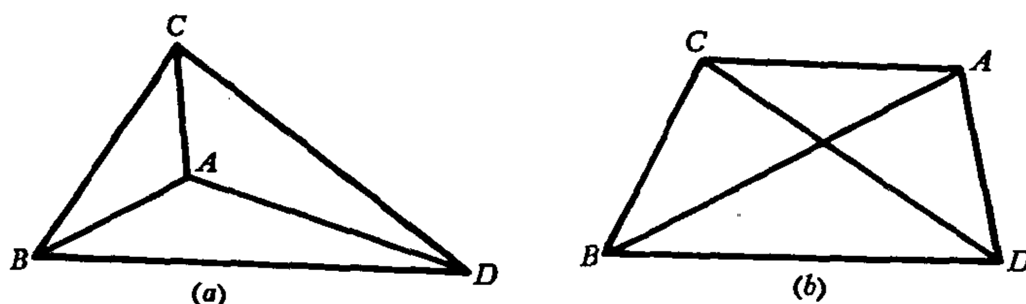


图 3—10

以用一面积矢量来表示，其方向按三角形投影面的外法线与 z 轴的夹角是大于 $\pi/2$ 或小于 $\pi/2$ 而指向正 z 或负 z 的方向。

在图 3—10 (a) 里，三角形 BAC，BDA，DCA 的面积矢量方向与三角形 BCD 的面积矢量方向相反，因为如果 BCD 的外法线指向正 z 方向，则其余三角形的外法线必定指向负 z 方向，又

$$S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BAC} + S_{\triangle BDA} + S_{\triangle DCA}$$

故四面体在该投影面上的面积矢量和等于零。

同样，也可以证明图 3—10 (b) 的情形。这时两三角形 BAC、BDA 的面积矢量与另外的两个三角形 BCD、CAD 的面积矢量方向相反，而且

$$S_{\triangle BAC} + S_{\triangle BDA} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle CAD}$$

故面积矢量和等于零。

因为可以用任意平面来代替 xy 平面，故四面体表面积矢量在任一平面上的投影都等于零，所以四面体的面积矢量必等于零，证毕。

推论 若 $\mathbf{A}_0$ 是一个常矢量，s 是一闭合曲面，则

$$\oiint_s \mathbf{A}_0 \cdot d\mathbf{s} = 0 \qquad (3—58)$$

三　矢量场的通量

设 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 是在有向光滑曲面 s 上 P 点的一个矢量，$\boldsymbol{n}$ 是同一点的单位法线矢量，如果我们把 s 面分成很多个极小的面积元 Δs，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{ds}$ 称为流过该面积元的通量。矢量 $\boldsymbol{A}$ 流过 s 面的通量为

$$\iint_s \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{ds} = \iint_s \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds \qquad (3—59)$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 称为通量密度。

式（3—59）也叫做矢量 $\boldsymbol{A}$ 对 s 面的面积分。将式（3—55）和（3—56）代入式（3—59）得

$$\iint_s \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{ds} = \iint_{D*} \boldsymbol{A}\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}\right]dudv \qquad (3—60)$$

又

$$\boldsymbol{A}(x,\ y,\ z) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$$

因此

$$\iint_s \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds = \iint_s [A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma]ds$$

而

$$\cos\alpha ds = dydz$$
$$\cos\beta ds = dzdx$$
$$\cos\gamma ds = dxdy$$

分别表示面积元 $\boldsymbol{ds}$ 在 yz,zx,xy 平面上的投影。所以

$$\iint_s \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{ds} = \iint_s (A_xdydz + A_ydzdx + A_zdxdy) \qquad (3—61)$$

式(3—61)的面积分形式类似于式(3—41)的线积分形式。

现在我们来看看面积分的物理意义。设有一流速场 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$，流体是稳定流动的、不可压缩的液体（不可压缩表示流体的密度不变），令密度等于1。当流体从面积元 $\boldsymbol{ds}$ 上流出时，$\boldsymbol{v}$ 指向外侧面，在很短的时间 Δt 内，流出 $\boldsymbol{ds}$ 面积元的流量等于以 $\boldsymbol{ds}$ 为底，棱边为 $\boldsymbol{v}\Delta t$ 的柱体，它的体积为

$$\boldsymbol{v}\Delta t\cdot\boldsymbol{ds} = v_n\Delta tds$$

在单位时间内流过面积元 $\boldsymbol{ds}$ 的通量为

$$dQ = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{ds}$$

流过整个面 s 的流量（通量）为

$$Q=\iint_s \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{3—62}$$

当 $\boldsymbol{v}$ 与 $d\boldsymbol{s}$ 成锐角时，$\boldsymbol{v}$ 指向 $d\boldsymbol{s}$ 的正侧，$dQ>0$，表示在单位时间内流过 $d\boldsymbol{s}$ 的通量为正；当 $\boldsymbol{v}$ 与 $d\boldsymbol{s}$ 成钝角时，$\boldsymbol{v}$ 指向 $d\boldsymbol{s}$ 的负侧，通量为负。当总通量 $Q>0$ 时，表示从正侧经过 s 的流量大于从负侧经过 s 的流量。

若 s 为一闭合曲面，则通量为

$$Q=\oiint_s \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{3—63}$$

它代表流出 s 面的正通量和流入 s 面的负通量的代数和。当 $Q>0$ 时，流出量大于流入量，闭合面 s 包围的体积 V 内必定有源存在，称为正源；当 $Q<0$ 时，流入量大于流出量，体积 V 内存在负源。

面积分在电磁场理论里有很重要的应用，例如，电通量密度（电位移矢量）$\boldsymbol{D}$ 穿过面 s 的电通量为

$$\Phi_e=\iint_s \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{3—64}$$

磁通量密度 $\boldsymbol{B}$ 穿过面 s 的磁通量为

$$\Phi_m=\iint_s \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{3—65}$$

例 2 试计算矢径 $\boldsymbol{R}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 经过直圆柱的通量，设坐标原点位于圆柱下底面的中心，圆柱半径为 a，高度为 h（图 3—11）。

解法一 由式(3—63)

$$Q=\oiint_s \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_{s_1} R_n ds+\iint_{s_2} R_n ds+\iint_{s_3} R_n ds$$

式中 s_1 代表圆柱的侧面，s_2 代表上底面，s_3 代表下底面。

在下底面，$\boldsymbol{R}$ 与法线 $\boldsymbol{n}$ 垂直，$R_n=0$，因此

$$\iint_{s_3} R_n ds=0$$

在上底面，$\boldsymbol{n}$ 平行于 z 轴，$R_n=h$，因此

$$\iint_{s_2} R_n ds=h\iint_{s_2} ds=\pi a^2 h$$

在侧面，外法线 $\boldsymbol{n}$ 平行于 xy 平面，$R_n=a$，因此

$$\iint_{s_1} R_n ds=a\iint_{s_1} ds=2\pi a^2 h$$

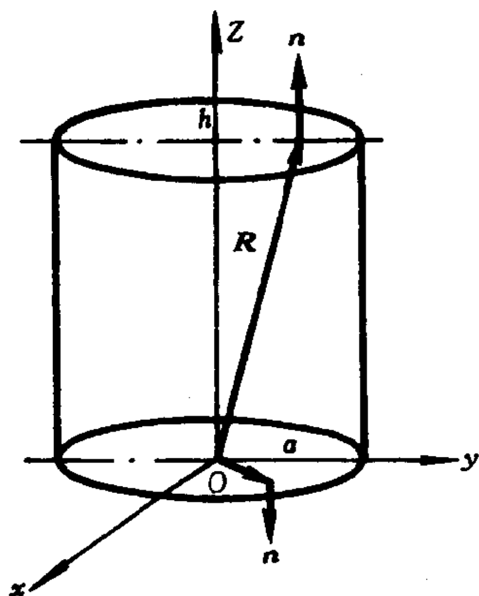


图 3—11

于是

$$\oiint_{s} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{s} = 3\pi a^2 h$$

解法二　计算通过上、下底面通量的方法与解法一相同。

在侧面，参数方程为

$$\boldsymbol{R}(u,\ v) = a\cos u\boldsymbol{i} + a\sin u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$$

$$(0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant h)$$

因此

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v} = a(\cos u\boldsymbol{i} + \sin u\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{R} \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}\right] = a^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u = a^2$$

由式(3—60)

$$Q_1 = \iint_{s_1} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{s}$$

$$= \iint_{D^*} \boldsymbol{R} \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}\right] du dv$$

$$= a\int_0^{2\pi}\int_0^h du dv = 2\pi a^2 h$$

解法三　参数方程为

$$x = a\cos u, \qquad y = a\sin u$$

因此

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$x = \pm\sqrt{a^2 - y^2}, \qquad y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(0 \leqslant x \leqslant a,\ -a \leqslant y \leqslant a,\ 0 \leqslant z \leqslant h)$$

$$Q = \oiint_s \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{s_1} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{s} + \iint_{s_2} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{s} + \iint_{s_3} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{s}$$

由式(3—61)

$$\iint_{s_1} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{\sigma_1} x dydz + \iint_{\sigma_1'} y dzdx + \iint_{\sigma_1''} z dxdy$$

式中 $\sigma_1, \sigma_1', \sigma_1''$ 分别是 s_1 在 yz, zx 和 xy 平面上的投影。侧面在 xy 平面上的投影 (σ_1'') 应为零,所以

$$\begin{aligned}\iint_{s_1} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{s} &= \int_{-a}^{a}\int_{0}^{h} \sqrt{a^2 - y^2}\,dydz + \int_{-a}^{a}\int_{0}^{h} \sqrt{a^2 - x^2}\,dxdz \\ &= \frac{h}{2}\left[y\sqrt{a^2 - y^2} + a^2 \arcsin\frac{y}{a}\right]_{-a}^{a} \\ &\quad + \frac{h}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a} \\ &= 2\pi a^2 h\end{aligned}$$

在下底

$$\iint_{s} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{\sigma_3} x dydz + \iint_{\sigma_3'} y dzdx + \iint_{\sigma_3''} z dxdy$$

式中 σ_3 和 σ_3' 是 s_3 在 yz 和 zx 平面上的投影,应该等于零,并且 $z = 0$,因此

$$\iint_{s_3} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

在上底,σ_2 和 σ_2' 也等于零,$z = h$,故

$$\iint_{s_2} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{s} = h\iint_{\sigma_2''} dxdy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy$$

$$= 2h\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \pi a^2 h$$

因此

$$Q = \oiint_s \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{s} = 3\pi a^2 h$$

以上三种解法表明,通量的数值与表面参数的表示法无关。

例 3　试计算矢径 $\boldsymbol{R}$ 通过直圆锥的通量，已知圆锥的顶点位于原点，圆锥的底半径等于 a，高度等于 h（图 3—12）。

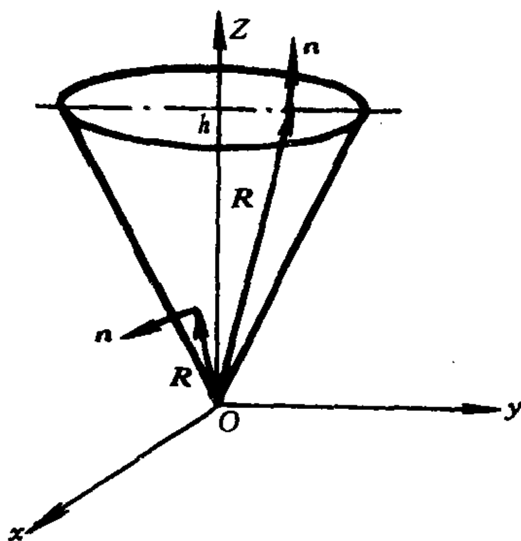


图 3—12

解

$$Q=\oiint_{s}\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_{s_1}\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{s}+\iint_{s_2}\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{s}$$

式中 s_1 是圆锥的侧面，s_2 是圆锥的底面。

在侧面，矢径 $\boldsymbol{R}$ 与圆锥的法线垂直，因此

$$\iint_{s_1}\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{s}=0$$

在底面，$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}=h$，因此

$$Q=\iint_{s_2}\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{s}=h\iint_{s_2}ds=\pi a^2h$$

以上二例表明，矢径通过直圆柱和直圆锥的通量都等于它们各自体积的三倍。此结果可以推广到任意的闭合曲面。

定理 2　矢径通过任一闭合曲面的通量等于该闭合面围成体积的三倍，即

$$\oiint_{s}\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{s}=3V \qquad (3—66)$$

式中 V 是闭合面 s 所包围的体积。

证明　我们以坐标原点为顶点作一无限小的立体角，它在闭合面上截出若干个面积元，例如图 3—13 所示的三个面积元。

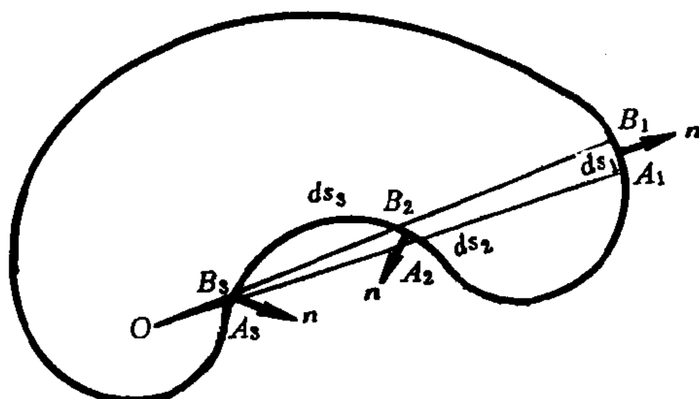


图 3—13

我们用 $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3$ 分别表示从 O 点到各个面积元的矢径，$\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$ 分别表示各面积元的单位法线矢量。根据例 3 的结果，$\boldsymbol{R}$ 通过顶点为 O，底面积为 ds 的圆锥体通量为

$$\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{ds}_1 = 3V_{OA_1B_1}$$

同样

$$\boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{ds}_2 = -3V_{OA_2B_2}$$

$$\boldsymbol{R}_3 \cdot \boldsymbol{ds}_3 = 3V_{OA_3B_3}$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{ds}_1 + \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{ds}_2 + \boldsymbol{R}_3 \cdot \boldsymbol{ds}_3 &= 3[V_{OA_1B_1} - V_{OA_2B_2} + V_{OA_3B_3}] \\ &= 3[V_{A_1B_1B_2A_1} + V_{OA_3B_3}]\end{aligned}$$

正好等于 s 面包围的体积内被立体角截出的体积。对于其它以 O 为顶点的各个立体角重复利用这种方法即得

$$\oiint_s \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{ds} = 3V$$

§3.5 矢量场的散度

一 散度的定义

我们在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的一点作一包围此点的闭合面 s，其体积为 ΔV，ΔQ 表示穿出 s 面的通量，当 ΔV 趋于零时(即缩到 P 点)时，若比值 $\Delta Q/\Delta V$ 的极限存在，则该比值称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 P 点的散度，记为

$$\text{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint_s \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{ds}}{\Delta V} \qquad (3—67)$$

式(3—67)表明,矢量 A 的散度是标量,它代表矢量 A 经由包围某点的无限小闭合面 s 流出单位体积的通量。当 $\text{div}A > 0$ 时,P 点是正源;当 $\text{div}A < 0$ 时,P 点是负源。

二　高斯–奥斯特洛格拉特斯基定理(简称高斯定理)

矢量 A 通过闭合面 s 的通量等于 A 的散度在 s 面所包围的体积 V 上的积分,即

$$\oiint_s A \cdot ds = \iiint_V \text{div}A dV \tag{3—68}$$

高斯定理建立了沿体积 V 的三重积分和沿该体积界面 s 的二重积分之间的关系。

证明　我们将闭合曲面 s 所包围的体积 V 分成 n 个由闭合曲面 $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n$ 所围成的体积元 $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3, \cdots, \Delta V_n$。我们知道,变量和它的极限之差为无限小,因此根据式(3—67)可以得到对于围成 ΔV_k 的闭合曲面 s_k 有如下的关系:

$$\frac{\oiint_{s_k} A \cdot ds}{\Delta V_k} = \text{div}A + \varepsilon_k$$

即

$$\oiint_{s_k} A \cdot ds = \text{div}A \Delta V_k + \varepsilon_k \Delta V_k$$

其中散度是在体积元中某一点 P 的值。ε_k 是足够小的量,视不同的体积元 ΔV_k 而异。将上式中的 k 用 1, 2, 3, …, n 代入,可以得到 n 个等式,相加后得

$$\sum_{k=1}^{n} \oiint_{s_k} A \cdot ds = \sum_{k=1}^{n} \text{div}A \Delta V_k + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Delta V_k$$

通过 ΔV_k 界面 s_k 的通量等于矢量 A 的面积分,设 ΔV_k 是一个六面体,它的各个面也是相邻六面体的面,因此在上式的积分里要出现两次,然而在相邻两个六面体公共面上的两个外法线的指向相反,因此这两个积分互相抵消。这样,在上式左端只剩下在闭合曲面 s 各小片上的积分,即

$$\oiint_s A \cdot ds = \sum_{k=1}^{n} \text{div}A \Delta V_k + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Delta V_k$$

将 n 无限制地增加,使 $\Delta V_k \to 0$,上式左端不变,右端第一项是以体积分 $\iiint_V \text{div}A dV$ 为极限。现在我们来证明右端第二项和趋

于零。对于矢量 A，可以认为当 n 足够大时，存在一无限小量 α，使得

$$|\varepsilon_1| < \alpha, \ |\varepsilon_2| < \alpha, \ \cdots, \ |\varepsilon_n| < \alpha$$

而

$$\lim_{n\to\infty} \alpha = 0$$

因此

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Delta V_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha \Delta V_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

全部体积元的和等于体积 V,因此

$$\lim_{n\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Delta V_k\right| = V \lim_{n\to 0} \alpha = 0$$

于是

$$\oiint_s \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \iiint_V \mathrm{div} \boldsymbol{A} dV$$

在电磁学里,高斯定律的积分形式为

$$\oiint_s \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} = q \qquad (3\text{—}69)$$

式中 q 是包含在闭合面 s 内的总电荷。在静电场中，正电荷代表正源;负电荷代表负源。假设体电荷密度为 ρ,则式(3—69)变成

$$\oiint_s \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} = \iiint_V \rho dV \qquad (3\text{—}70)$$

式(3—70)两端除 ΔV 并取极限得

$$\lim_{\Delta V\to 0} \frac{\oiint_s \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s}}{\Delta V} = \mathrm{div} \boldsymbol{D} = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\iiint_{\Delta V} \rho dV}{\Delta V} = \rho \qquad (3\text{—}71)$$

式中 ρ 代表求散度点 P 的电荷密度。式 (3—71) 是电磁学里高斯定律的微分形式。

三　用矢量的投影式表示它的散度

在计算矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度时，经常需要用矢量 $\boldsymbol{A}$ 的坐标分量 A_x, A_y, A_z 来表示它的散度。为了简化起见，我们把式(3—67)里的无限小体积元看成是以 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 为棱的矩形平行六面体，P 点位于它的中心(图 3—14)。

我们知道，只有当垂直于这些面的通量密度 $\boldsymbol{A}$ 从一个面到另一个面有变化时，通过平行六面体任何面的通量才会不同于通过它们对面的通量。假设两个相对面间的距离 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 很小，作为

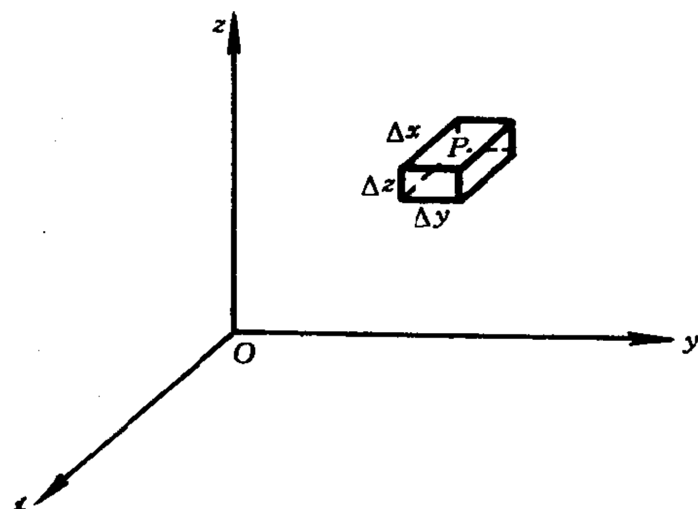


图 3—14

一阶近似，在 x 轴方向我们有如下的关系：

$$A_x\big|_{x+\frac{\Delta x}{2}} = A_x\big|_x + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$A_x\big|_{x-\frac{\Delta x}{2}} = A_x\big|_x - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}$$

从前面流出的通量为 $\Delta y\Delta z A_x\big|_{x+\frac{\Delta x}{2}}$，流入后面的通量为 $\Delta y\Delta z A_x\big|_{x-\frac{\Delta x}{2}}$，因此流出的净通量应为

$$\Delta y\Delta z\left(A_x\big|_{x+\frac{\Delta x}{2}} - A_x\big|_{x-\frac{\Delta x}{2}}\right) = \Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial A_x}{\partial x}$$

同样，在 y 轴和 z 轴方向，我们也可以得到类似的关系，因此流出该体积元的净通量为

$$\oiint_s \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial A_x}{\partial x} + \Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial A_y}{\partial y} + \Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{3—72}$$

以平行六面体的体积元 $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ 除式（3—72）两边并取极限得

$$\text{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_s \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{3—73}$$

四　散度的性质

（1）
$$\text{div}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F}) = \text{div}\boldsymbol{A} + \text{div}\boldsymbol{F} \tag{3—74}$$

证明　设

$$A = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$

则

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F} = (A_x + F_x)\boldsymbol{i} + (A_y + F_y)\boldsymbol{j} + (A_z + F_z)\boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F}) = \frac{\partial(A_x + F_x)}{\partial x} + \frac{\partial(A_y + F_y)}{\partial y} + \frac{\partial(A_z + F_z)}{\partial z}$$

$$= \mathrm{div}\boldsymbol{A} + \mathrm{div}\boldsymbol{F}$$

(2) $$\mathrm{div} f\boldsymbol{A} = f\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad} f \qquad (3\text{—}75)$$

式中 f 是一个可微的标函数。

证明 设

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

因此

$$f\boldsymbol{A} = fA_x\boldsymbol{i} + fA_y\boldsymbol{j} + fA_z\boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{div}(f\boldsymbol{A}) = \frac{\partial(fA_x)}{\partial x} + \frac{\partial(fA_y)}{\partial y} + \frac{\partial(fA_z)}{\partial z}$$

$$= f\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= f\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad} f$$

例 1 若 $|\boldsymbol{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，$\boldsymbol{c}$ 是一常矢量，试计算散度 $\mathrm{div}(|\boldsymbol{R}|\boldsymbol{c})$。

解 根据式(3—75)

$$\mathrm{div}(|\boldsymbol{R}|\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}\cdot\mathrm{grad}|\boldsymbol{R}|$$

又由式(3—28)得

$$\mathrm{div}(|\boldsymbol{R}|\boldsymbol{c}) = \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}$$

例 2 已知点电荷 q 位于坐标原点，试计算在 P 点电通量密度的散度。

解 因为

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi|\boldsymbol{R}|^3}\boldsymbol{R}$$

而

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

又

$$\mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]=0 \qquad (|\boldsymbol{R}|\neq 0)$$

所以

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=0 \tag{3—76}$$

式(3—76)表明，除 $|\boldsymbol{R}|=0$ 点(电荷所在点)外，$\boldsymbol{D}$ 的散度处处为零。

五　管形场

散度为零的场称为管形场。为了说明管形场的意义，我们来研究如图 3—15 所示的一个闭合面，它是由横截面 s_1、s_2 和始终平行于场矢量方向的曲面 s_3 所构成。

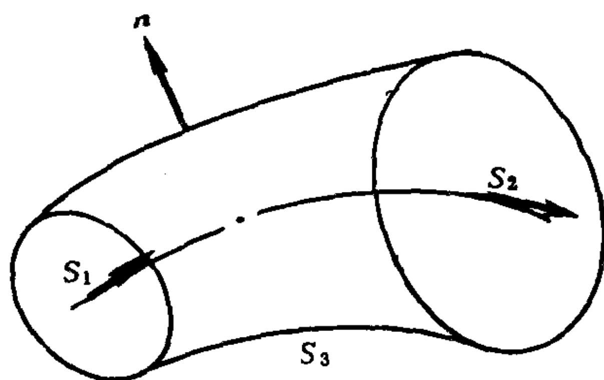


图 3—15

根据高斯定理：

$$\iint_{s_1}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}+\iint_{s_2}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}+\iint_{s_3}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}=0$$

因 s_3 平行于 $\boldsymbol{D}$，故没有通量由 s_3 流出，于是

$$\iint_{s_1}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}=-\iint_{s_2}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{3—77}$$

式中负号表示 s_1 和 s_2 的法线方向相反。

式(3—77)表明，流入 s_1 面的通量等于流出 s_2 面的通量，因此经过该管任何横截面的通量不变，即在管形场里，力线在任何地方既不会产生，也不会消失，这种管形区域称为通量管。

六　梯度公式

若标函数 f 及其一阶导数在闭合曲面 s 和以 s 为界的体积 V 内连续有限，则

$$\oiint_{s} f d\boldsymbol{s}=\iiint_{V}\mathrm{grad}f dV \tag{3—78}$$

证明 设

$$\boldsymbol{A} = f\boldsymbol{B}$$

式中 $\boldsymbol{B}$ 是一任意常矢量。

取上式的散度并利用散度性质(2)得

$$\text{div}\boldsymbol{A} = \text{div} f\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \text{grad} f$$

代入高斯公式(3—68)得

$$\oiint_s f\boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \iiint_V \boldsymbol{B} \cdot \text{grad} f dV$$

即

$$\boldsymbol{B} \cdot \oiint_s f d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{B} \cdot \iiint_V \text{grad} f dV$$

因 $\boldsymbol{B}$ 是一任意常矢量，故

$$\oiint_s f d\boldsymbol{s} = \iiint_V \text{grad} f dV$$

证毕。

七　哈米尔顿算子的应用

在讨论梯度时，我们曾引入了微分算子▽，根据算子▽的定义式(3—21)，它与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的标积为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k})$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div}\boldsymbol{A} \qquad (3\text{—}79)$$

式 (3—79) 表明，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度在形式上可以看成是微分算子▽与 $\boldsymbol{A}$ 的标积。散度的性质(1)和(2)可用▽表示成

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \boldsymbol{F} \qquad (3\text{—}80)$$

$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = f\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla f \qquad (3\text{—}81)$$

应该特别指出，算子▽并不是一个真实的矢量，只是一个运算符号，因此 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 并不等于 $\boldsymbol{A} \cdot \nabla$，$\boldsymbol{A} \cdot \nabla$ 只代表如下的微分算子：

$$\boldsymbol{A} \cdot \nabla = A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z} \qquad (3\text{—}82)$$

从式(3—82)表明，算子▽只作用于它后面的各个矢量而不作用于它前面的矢量。例如

$$(\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} = F_x\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial x} + F_y\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial y} + F_z\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial z} \qquad (3\text{—}83)$$

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{F})\boldsymbol{A} = \frac{\partial(F_x\boldsymbol{A})}{\partial x} + \frac{\partial(F_y\boldsymbol{A})}{\partial y} + \frac{\partial(F_z\boldsymbol{A})}{\partial z} \qquad (3\text{—}84)$$

在式(3—84)里，因为 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 都在 ∇ 的后面，所以微分算子既要作用于 $\boldsymbol{F}$，又要作用于 $\boldsymbol{A}$。根据乘积的微分法则，两函数乘积的导数，可用这样的方法得到：先微分第一个乘数，而把第二个乘数看成常数，再微分第二个乘数，而把第一个乘数看成常数，然后将两者相加即得两函数的导数。下面我们把看成常数的矢量用下标 c 表示，则

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{F})\boldsymbol{A} = (\nabla \cdot \boldsymbol{F})\boldsymbol{A}_c + (\nabla \cdot \boldsymbol{F}_c)\boldsymbol{A}$$

在 $(\nabla \cdot \boldsymbol{F}_c)$ 里，由于 $\boldsymbol{F}_c$ 看成是常数，所以可把 ∇ 和 $\boldsymbol{F}_c$ 的次序互换，即

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{F}_c)\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{F}_c \cdot \nabla)\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}$$

因为 $\boldsymbol{F}_c$ 位于 ∇ 的前面，算子 ∇ 不作用于 $\boldsymbol{F}_c$，所以没有必要再加上下标 c 了。此外

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{F})\boldsymbol{A}_c = \boldsymbol{A}_c(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{F})$$

于是

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \boldsymbol{F})\boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) \\ &= \left(F_x\frac{\partial}{\partial x} + F_y\frac{\partial}{\partial y} + F_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{A} \\ &\quad + \boldsymbol{A}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial(F_x\boldsymbol{A})}{\partial x} + \frac{\partial(F_y\boldsymbol{A})}{\partial y} + \frac{\partial(F_z\boldsymbol{A})}{\partial z}\end{aligned}$$

注意：在使用哈米尔顿算子 ∇ 时必须特别谨慎，由它导出的公式应该用普通的方法加以验证。

八　拉普拉斯方程

若标函数 f 在域 D 内二阶可微，则 f 的梯度为

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

再作它的散度

$$\nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

我们引入一个二次微分算子：

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3—85}$$

Δ 或 ∇^2 称为拉普拉斯算子。下列的方程

$$\Delta f = \nabla^2 f = 0 \tag{3—86}$$

称为拉普拉斯方程，它是一个很重要的数学物理方程。

当函数 f 不取决于某一坐标时，式(3—86)变成了二维的拉普拉斯方程。例如，当函数 f 不取决于 z 时，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \tag{3—87}$$

这意味着在任何平行于 xy 平面的平面上，f 值的分布相同。

在 § 3.1 的例 1 里我们曾得到

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$$

而

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=-\varepsilon\nabla\varphi$$

又由式(3—71)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=-\varepsilon\nabla\cdot\nabla\varphi=\rho$$

即

$$\nabla^2\varphi=\Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3—88}$$

式(3—88)称为泊松方程。在不含电荷的区域里，泊松方程变成了拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\varphi=\Delta\varphi=0 \tag{3—89}$$

在理想导体内部，电场强度为零，即 $\nabla\varphi=0$，因此 $\varphi=$ 常数。又因 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=-\varepsilon\nabla\cdot\nabla\varphi=0$，故 ρ 应该为零，所以在理想导体内部不会有电荷存在，所有的电荷都集中在理想导体表面上。

九　热传导方程

物体的热状态可以用温度函数 $f(x,y,z,t)$ 来表征。假设均匀物体的体积为 V，它的界面是 s，物体的密度为 ρ，热容量为 c，于是体积元 dV 的质量为 ρdV。根据热容量的定义，在 dt 时间里体积元的温度上升 $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)dt$ 度，所需的热量为

$$dQ=c\rho dv\frac{\partial f}{\partial t}dt$$

在 dt 时间里需要供给体积 V 的热量为

$$Q=\iiint_V c\rho\frac{\partial f}{\partial t}dtdV \tag{3—90}$$

另一方面，假设热只由传导方式从一处传到另一处，在物体内的每一点必然存在一热通量密度矢量 $\boldsymbol{q}(x,y,z,t)$，经过 s 面的通量代表单位时间里通过 s 面的热量，在 dt 时间里流出的热量为

$$Q = -\oiint_s \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{ds}dt \tag{3—91}$$

式(3—90)和(3—91)应相等,因此

$$\iiint_V c\rho\frac{\partial f}{\partial t}dtdV = -\oiint_s \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{ds}dt$$

利用高斯定理把上式的面积分换成体积分得

$$\iiint_V c\rho\frac{\partial f}{\partial t}dV = -\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{q}dV$$

即

$$\iiint_V \left(c\rho\frac{\partial f}{\partial t}dV + \nabla \cdot \boldsymbol{q}\right)dV = 0 \tag{3—92}$$

式(3—92)对任何体积 V 均成立,故积分号下的函数必恒等于零,即

$$c\rho\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{q} = 0 \tag{3—93}$$

由于 q 在物体中是由温度较高的部分指向温度较低的部分,因此

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla f \tag{3—94}$$

式中 k 是导热系数。

把式(3—94)代入式(3—93)得

$$c\rho\frac{\partial f}{\partial t} - \nabla \cdot (k\nabla f) = 0$$

设

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a^2\nabla^2 f = a^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) \tag{3—95}$$

式(3—95)称为热传导方程。

在热变化稳定的条件下,$\partial f/\partial t = 0$,热传导方程变成

$$\nabla^2 f = 0$$

即温度满足拉普拉斯方程。

十　连续性方程

在讨论可压缩流体(如气体)的运动时,速度场中每一点的速度 $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ 和流体的密度 $\rho(x, y, z, t)$ 的关系式称为连续性方程。下面我们来计算在任何给定的静止面 s 内部流体质量的变化

情况。

若面 s 包围的体积为 V，则在体积元 dV 里的质量为 ρdV，在面 s 内部，流体的质量为

$$M = \iiint_V \rho dV$$

假定在 dt 时间内密度有一增量 $(\partial\rho/\partial t)dt$，与此同时，在面 s 内部的质量变化为

$$dM = \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dt dV \tag{3—96}$$

由于运动是无源的，在同样时间内应有相同的质量增量流入体积 V。我们在界面 s 上取一面积元 $\boldsymbol{ds}$，在 dt 时间内经过此面积元流出的流体体积等于 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{ds}dt$，质量为 $\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{ds}dt$，由整个面积流出的质量为

$$\oiint_s \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{ds}dt$$

故

$$dM = -\oiint_s \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{ds}dt \tag{3—97}$$

式(3—96)和式(3—97)应相等，因此

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \oiint_s \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{ds} = 0 \tag{3—98}$$

利用高斯定理把式(3—98)中的面积分换成体积分得

$$\iiint_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right] dV = 0$$

因上式对任何体积均成立，故

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{3—99}$$

式(3—99)称为连续性方程。

根据散度性质(2)

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho$$

于是式(3—99)变成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{3—100}$$

又 $\rho(x,y,z,t)$ 可以看成是 t 的复合函数，所以

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{3—101}$$

计算上述微分时，必须把 x,y,z 看成是 t 的函数，因为坐标为 x,y,z

的质点在以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，故

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}$$

将上式代入式(3—101)得

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y}v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z}v_z$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \boldsymbol{v}$$

即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} - \nabla \rho \cdot \boldsymbol{v} \tag{3—102}$$

将式(3—102)代入式(3—100)，连续性方程(3—99)变成了下面的常用形式：

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{3—103}$$

若 ρ = 常数，即流体是不可压缩的，则

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

于是连续性方程(3—103)变成

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

在这样的条件下，速度场是一个管形场，若不可压缩流体的运动具有一速度位 φ，即

$$\boldsymbol{v} = \nabla \varphi \tag{3—104}$$

则

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0 \tag{3—105}$$

由此可见，在不可压缩流体的运动中，速度位函数 φ 满足拉普拉斯方程。

在交变电磁场里，如果用 ρ 表示电荷的空间密度，则电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 可写成

$$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v} \tag{3—106}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 代表电荷的运动速度。于是连续性方程(3—99)变成

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3—107}$$

式(3—107)称为电荷的连续性。它表示电荷与电流密度之间的关系。

§3.6 矢量场的旋度

一 概述

§3.5 里我们讨论过由矢量 $\boldsymbol{A}$ 构成的标量场——散度（$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$），现在我们要讨论由矢量场 $\boldsymbol{A}$ 构成一个新的矢量场——旋度（$\nabla\times\boldsymbol{A}$）。散度定义为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在小闭合面上的面积分与该闭合面所围成的体积之比的极限，其运算结果是一个标量；旋度则定义为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿小闭合路径的线积分与该路径围成的面积之比的极限，其运算的结果是一个矢量，这是因为积分路径所围成的面积元方向必须用某种方式表现出来。

计算矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿无限小闭合路径线积分（环流）时，通过 P 点的平面（用法线 $\boldsymbol{n}$ 表示该平面的方向）可有无限多个，不同的方向有不同的环流值。通常规定能够得到最大环流值的平面作为确定该点旋度的面，其法线方向就代表旋度的方向。这和 §3.1 里定义标量场的梯度矢量很类似。在标量场里，我们引入了方向导数的概念，梯度的方向代表最大方向导数的方向，梯度的模就是最大方向导数的数值，而且梯度在任一方向的投影就是该方向的方向导数。在矢量场中，我们也要引入一个类似于标量场中方向导数的量——环流面密度。

二 环流面密度

在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 里任取一点 P，过 P 点作一小曲面 Δs，用 $\boldsymbol{n}$ 表示该面在 P 点的法线，Δs 表示它的面积大小，曲面的周界为 Δl，它的正方向与 $\boldsymbol{n}$ 构成右手螺旋法则。当 Δs 在 P 点保持 $\boldsymbol{n}$ 的方向不变并以任意方向缩小到 P 点时，若场矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿 Δl 的正向环流与 Δs 之比的极限存在，则将此比值的极限称为在 P 点沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的环流面密度，记为

$$T_n=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta s} \tag{3—108}$$

在直角坐标系里，为了计算沿 z 轴的环流面密度，我们在 xy 平面上选择一无限小的面积元，它的法线指向 z 轴的方向（图 3—16）。

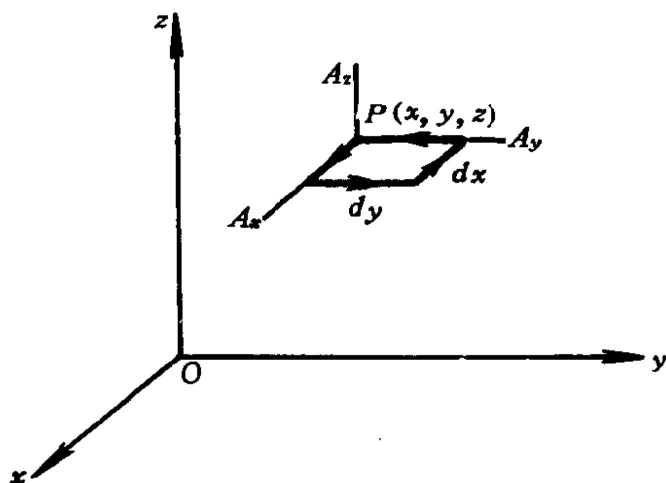


图 3—16

以正 z 作为右手螺旋法则指向的积分路径如图中的箭头所示。环流为

$$\oint_{\Delta l} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = A_y\big|_{x-dx}dy - A_x\big|_{y+dy}dx - A_y\big|_x dy + A_x\big|_y dx$$

所以

$$A_x\big|_{y+dy} = A_x\big|_y + \frac{\partial A_x}{\partial y}\bigg|_y dy$$

$$A_y\big|_{x+dx} = A_y\big|_x + \frac{\partial A_y}{\partial x}\bigg|_x dx$$

因此

$$\oint_{\Delta l} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dxdy$$

由式(3—108)，在 P 点沿正 z 方向的环流密度为

$$T_z = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint_{\Delta l} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta s} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad (3—109)$$

同样，在 yz 平面和 xz 平面上取面积元，我们可以分别得到沿正 x 方向和正 y 方向的环流面密度：

$$T_x = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint_{\Delta l} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta s} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \qquad (3—110)$$

和

$$T_y = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint_{\Delta l} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta s} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \qquad (3—111)$$

知道了环流面密度在三个坐标轴上的分量以后，该矢量在任意方向 $\boldsymbol{n}$ 的投影为

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=T_n=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta$$
$$+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma \qquad (3—112)$$

三　矢量场的旋度

式(3—112)表明，环流面密度矢量 $\boldsymbol{T}$ 在任一方向向 $\boldsymbol{n}$ 的投影就是该方向的环流面密度，因此 $\boldsymbol{T}$ 的方向就代表最大环流面密度的方向，它的模就是最大环流面密度的数值。我们把矢量 $\boldsymbol{T}$ 定义为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 P 点的旋度，记为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T} \qquad (3—113)$$

旋度在直角坐标系里的表示式为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}$$
$$+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \qquad (3—114)$$

式(3—114)也可以表示成便于记忆的形式

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \qquad (3—115)$$

利用哈米尔顿算子▽，旋度可以表示成▽与 $\boldsymbol{A}$ 的矢积形式：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (3—116)$$

为了进一步表明旋度的意义，我们来讨论以下的两个例子：

例1　若质点 P 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕 OL 轴旋转(图 3—17)，它的线速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R} \qquad (3—117)$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 是 P 点的矢径，$\boldsymbol{\omega}$ 的方向沿转动轴并指向使 P 点的旋转是反时针的方向，试计算速度 $\boldsymbol{v}$ 的旋度。

解　因为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{R}&=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{\omega}&=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\} \qquad (3—118)$$

所以

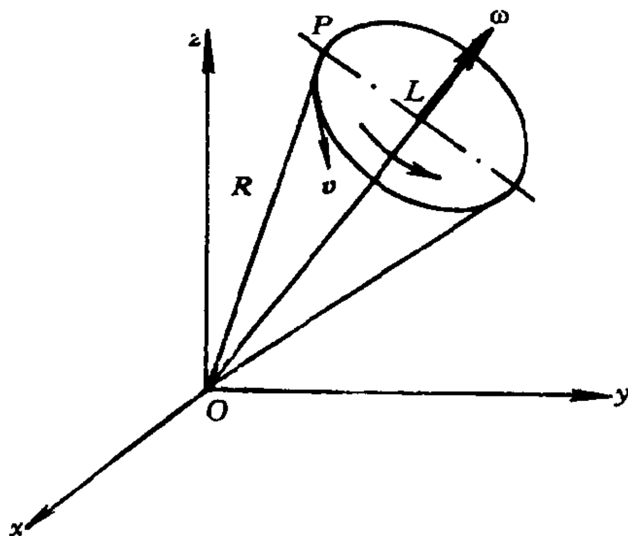


图 3—17

$$
\boldsymbol{v} = (z\omega_y - y\omega_z)\boldsymbol{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\boldsymbol{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\boldsymbol{k} \qquad (3\text{—}119)
$$

代入式(3—114)得

$$
\mathrm{rot}_x\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \omega_x + \omega_x = 2\omega_x
$$

$$
\mathrm{rot}_y\boldsymbol{v} = 2\omega_y
$$

$$
\mathrm{rot}_z\boldsymbol{v} = 2\omega_z
$$

因此

$$
\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 2(\omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}) = 2\boldsymbol{\omega} \qquad (3\text{—}120)
$$

例 2　试计算绕 z 轴旋转的流体速度场旋度。

解　因为 z 轴是旋转轴，所以

$$
\cos(z,\hat{x}) = 0, \qquad \cos(z,\hat{y}) = 0
$$

$$
\cos(z,\hat{z}) = 1
$$

于是在式(3—118)里

$$
\omega_x = \omega\cos(z,\hat{x}) = 0 \qquad \omega_y = \omega\cos(z,\hat{y}) = 0
$$

$$
\omega_z = \omega\cos(z,\hat{z}) = \omega
$$

代入式(3—119)得

$$
v_x = -\omega y, \qquad v_y = \omega x, \qquad v_z = 0
$$

即

$$
\boldsymbol{v} = \omega(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})
$$

$$
\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = (\omega + \omega)\boldsymbol{k} = 2\omega\boldsymbol{k}
$$

上述两例表明：线速度 v 旋度的模等于物体旋转角速度的两倍，而旋度的方向与旋转轴指向一致，这就是“旋度”一词的来源。

在电磁学里，稳态的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿闭合路径的线积分（环流）等于该路径包围的电流 I，即

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I \tag{3—121}$$

式（3—121）称为毕奥-沙伐尔定律。根据环流面密度的概念，我们可以导出电流密度的概念，即

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta s} = \frac{dI}{ds} = \boldsymbol{J} \tag{3—122}$$

式中 $\boldsymbol{J}$ 代表在 P 点沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的电流密度。

安培定律可以写成如下的形式：

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{3—123}$$

式中 $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ 是磁通量密度。$\boldsymbol{A}$ 是矢量磁位：

$$\boldsymbol{A} = \int_l \frac{\mu I d\boldsymbol{l}}{4\pi R} \tag{3—124}$$

式中 R 是从积分的电流元到要计算 $\boldsymbol{A}$ 的那点间的距离。

若体积 V 内的电流用电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 表示，则式（3—124）变成

$$\boldsymbol{A} = \iiint_V \frac{\mu \boldsymbol{J} dV}{4\pi R} \tag{3—125}$$

四　旋度的性质

(1)
$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} + \operatorname{rot}\boldsymbol{F} \tag{3—126}$$

证明的方法与散度相应的公式相似。

(2)
$$\operatorname{rot}(f\boldsymbol{A}) = f\operatorname{rot}\boldsymbol{A} + \operatorname{grad}f \times \boldsymbol{A} \tag{3—127}$$

式中 f 是一可微的标函数。

证明

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}_x(f\boldsymbol{A}) &= \frac{\partial}{\partial y}(fA_z) - \frac{\partial}{\partial z}(fA_y) \\
&= f\frac{\partial A_z}{\partial y} + A_z\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial A_y}{\partial z} - A_y\frac{\partial f}{\partial z} \\
&= f\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}A_z - \frac{\partial f}{\partial z}A_y \\
&= f\operatorname{rot}_x\boldsymbol{A} + [\operatorname{grad}f \times \boldsymbol{A}]_x
\end{aligned}$$

同样

$$\mathrm{rot}_y(f\boldsymbol{A}) = f\mathrm{rot}_y\boldsymbol{A} + [\mathrm{grad}f \times \boldsymbol{A}]_y$$

$$\mathrm{rot}_z(f\boldsymbol{A}) = f\mathrm{rot}_z\boldsymbol{A} + [\mathrm{grad}f \times \boldsymbol{A}]_z$$

于是

$$\mathrm{rot}(f\boldsymbol{A}) = f\mathrm{rot}\boldsymbol{A} + [\mathrm{grad}f \times \boldsymbol{A}]$$

利用算子∇,式(3—126)和式(3—127)表示为

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F}) = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{F} \tag{3—128}$$

$$\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = f\nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla f \times \boldsymbol{A} \tag{3—129}$$

例 3　已知$\boldsymbol{a}$是一常矢量，$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，试求$\mathrm{rot}(R\boldsymbol{a})$。

解　因为

$$R\boldsymbol{a} = R(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})$$

$$= Ra_x\boldsymbol{i} + Ra_y\boldsymbol{j} + Ra_z\boldsymbol{k}$$

而且a_x, a_y, a_z都是常数，又

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z}{R}$$

于是

$$\mathrm{rot}_x(R\boldsymbol{a}) = \frac{\partial}{\partial y}(Ra_z) - \frac{\partial}{\partial z}(Ra_y) = a_z\frac{\partial R}{\partial y} - a_y\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= a_z\frac{y}{R} - a_y\frac{z}{R} = \frac{1}{R}[\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{a}]_x$$

同样

$$\mathrm{rot}_y(R\boldsymbol{a}) = \frac{1}{R}[\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{a}]_y$$

$$\mathrm{rot}_z(R\boldsymbol{a}) = \frac{1}{R}[\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{a}]_z$$

这一结果也可以直接从旋度的性质(2)得到。由式(3—129)

$$\nabla \times (R\boldsymbol{a}) = R\nabla \times \boldsymbol{a} + \nabla R \times \boldsymbol{a} = \nabla R \times \boldsymbol{a}$$

又由式(3—28)

$$\nabla R = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

于是

$$\nabla \times (R\boldsymbol{a}) = \frac{1}{R}(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{a})$$

例 4　已知$f(R)$是一可微标函数，$\boldsymbol{R}$是$P(x,y,z)$点的位置矢量，试计算$\nabla \times [f(R)\boldsymbol{R}]$。

解　由式(3—129)

$$\nabla \times [f(R)\boldsymbol{R}] = f(R)\nabla \times \boldsymbol{R} + \nabla f(R) \times \boldsymbol{R}$$

而

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{R} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= 0$$

又由式(3—27)

$$\nabla f(R) = \frac{df(R)}{dR}\boldsymbol{R}^0$$

于是

$$\nabla f(R) \times \boldsymbol{R} = \frac{df(R)}{dR}[\boldsymbol{R}^0 \times \boldsymbol{R}] = 0$$

即

$$\nabla \times [f(R)\boldsymbol{R}] = 0$$

例 5　试计算 $\nabla \cdot [\boldsymbol{a}(r) \times \boldsymbol{b}(r)]$。

解　运用我们在§3·5（七）里所介绍的规则

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= \nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_c) + \nabla \cdot (\boldsymbol{a}_c \times \boldsymbol{b}) \\ &= (\nabla \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}_c - \nabla \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}_c) \\ &= (\nabla \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}_c - \boldsymbol{a}_c \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b}) \qquad (3—130)\end{aligned}$$

现在用直接计算来验证式(3—130)。

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= \frac{\partial(a_y b_z - a_z b_y)}{\partial x} + \frac{\partial(a_z b_x - a_x b_z)}{\partial y} \\ &\quad + \frac{\partial(a_x b_y - a_y b_x)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial a_y}{\partial x}b_z + a_y\frac{\partial b_z}{\partial x} - \frac{\partial a_z}{\partial x}b_y - a_z\frac{\partial b_y}{\partial x} + \frac{\partial a_z}{\partial y}b_x \\ &\quad + a_z\frac{\partial b_x}{\partial y} - \frac{\partial a_x}{\partial y}b_z - a_x\frac{\partial b_z}{\partial y} + \frac{\partial a_x}{\partial z}b_y + a_x\frac{\partial b_y}{\partial z} \\ &\quad - \frac{\partial a_y}{\partial z}b_x - a_y\frac{\partial b_x}{\partial z} \\ &= b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \\ &\quad - \left[a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right) + a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) + a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\right] \\ &= \boldsymbol{b} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

五　斯托克斯定理

定理 矢量 A 在闭合曲线 c 上的环流等于它的旋度经过由此周线围成的面上的通量，即

$$\oint_c A \cdot dR = \oiint_s \text{rot}A \cdot ds \tag{3—131}$$

证明 我们把曲面 s 分成很多很小的面积元 $s_k n$，它们的周线为闭合曲线 c_k（图 3—18）。任取一充分小的正数 ε_k，若 s_k 足够小，则对每个面积必有：

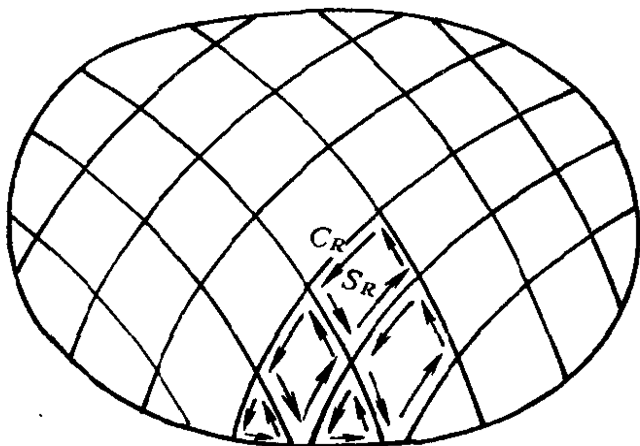


图 3—18

$$\left|\frac{1}{s_k}\oint_{c_k} A \cdot dR - \text{rot}A \cdot n_k\right| < \varepsilon_k$$

即

$$\left|\oint_{c_k} A \cdot dR - \text{rot}A \cdot s_k\right| < \varepsilon_k s_k$$

将 $k=1,2,3,\cdots,n$ 代入上式，我们可以得到 n 个不等式，相加后只剩下沿曲线 c 的线积分，因为沿其它各个曲线元 c_k 的积分都相互抵消了。于是

$$\left|\oint_c A \cdot dR - \sum_{k=1}^{n}\text{rot}A \cdot s_k\right| < \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k s_k$$

将 n 无限增大，而使每个面元都趋于零，则上式左端第一项不变，左端第二项和以 $\iint_s \text{rot}A \cdot ds$ 为极限。与高斯–奥斯特洛格拉特斯基定理中的情形一样，右端也趋于零。因此

$$\oint_c A \cdot dR = \iint_s \text{rot}A \cdot ds$$

证毕。

斯托克斯定理还有一种形式，称为矢量的斯托克斯定理。令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A} \qquad (3\text{—}132)$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 是一常矢量，$\boldsymbol{B}$ 是位置矢量函数。

取式(3—132)的散度并利用式(3—130)得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (3\text{—}133)$$

将式(3—132)、(3—133)分别代入等式(3—68)的两端得

$$\oiint_s[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}]\cdot\boldsymbol{n}ds=\iiint_V[-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})]dV$$

即

$$-\boldsymbol{a}\cdot\oiint_s(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})ds=-\boldsymbol{a}\cdot\iiint_V(\nabla\times\boldsymbol{A})dV$$

因为 $\boldsymbol{a}$ 是一任意常矢量，故

$$\oiint_s(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})ds=\iiint_V(\nabla\times\boldsymbol{A})dV \qquad (3\text{—}134)$$

这就是矢量斯托克斯公式。

例 6 已知 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(1-z)y\boldsymbol{i}+ze^x\boldsymbol{j}+x\sin z\boldsymbol{k}$，试计算面积分

$$\iint_s\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds$$

式中 s 是半球：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$\boldsymbol{n}$ 具有正 z 分量。

解 由斯托克斯定理

$$\iint_s\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds=\oint_c A\cdot d\boldsymbol{R}$$

$$=\oint_c(1-z)ydx+ze^xdy+x\sin zdz$$

$$(3\text{—}135)$$

式中 c 是 s 的周线。

在 $z=0$ 的平面上，c 是沿反时针方向的一圆周：

$$x^2+y^2=a^2$$

将 $z=0$ 代入式(3—135)得

$$\iint_s\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds=\oint_c ydx$$

设

$$y=a\sin t,\qquad x=a\cos t \qquad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$$

$$dx=-a\sin tdt$$

于是

$$\iint_s \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} ds = \int_0^{2\pi} - a^2 \sin^2 t dt$$
$$= - a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$
$$= - \pi a^2$$

六　斯托克斯定理的推论

推论 1　势场必为旋度为零的场（无旋场）。

证明　因 $\boldsymbol{A}$ 是势场，故

$$\boldsymbol{A} = \nabla u$$

取任一包围 P 点的闭合曲线 c 的线积分，必有

$$\oint_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{R} = 0$$

由斯托克斯定理得

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_n = 0$$

因为上式对任何方向都成立，所以

$$\nabla \times \nabla u = 0 \tag{3—136}$$

推论 2　旋度为零的场必为有势场。

证明　若

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$$

根据斯托克斯定理，$\boldsymbol{A}$ 沿任一闭合曲线 c 的线积分应该等于零，又由 § 3.3 的定理 2〔式(3—44)〕

$$\boldsymbol{A} = \nabla u$$

由此可以得出一个重要的结论：在单连域内，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 为势场的充要条件是它的旋度处处为零。

推论 3　任一矢量场的旋度构成的场都是管形场，即

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{3—137}$$

证明　若 s 是一闭合面，当周线 c 收缩到一点时，由斯托克斯定理得

$$\oiint_s [\nabla \times \boldsymbol{A}] \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

由散度定义得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

证毕。

推论 4　任一管形场 $\boldsymbol{A}$ 都可以表示成另一矢量 $\boldsymbol{F}$ 的旋度，即若

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

则

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{F} \tag{3—138}$$

证明 我们选择一直角坐标系，使 $E_z = 0$，因此式(3—138)变成只有两个未知数 $F_x(x,y,z)$ 和 $F_y(x,y,z)$ 的三个方程

$$-\frac{\partial F_y}{\partial z} = A_x, \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = A_y,$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = A_z \tag{3—139}$$

积分上式中的第二式和第三式得

$$\left.\begin{aligned} F_y(x, y, z) &= -\int_{z_0}^{z} A_x(x, y, z)dz + g(x, y) \\ F_x(x, y, z) &= \int_{z_0}^{z} A_y(x, y, z)dz + h(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{3—140}$$

式中 $g(x,y)$ 和 $h(x,y)$ 是 x,y 的待定函数。将式(3—140)代入式(3—139)中的第三式得

$$-\int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_x}{\partial x}dz + \frac{\partial g}{\partial x} - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_y}{\partial y}dz - \frac{\partial h}{\partial y} = A_z(x, y, z) \tag{3—141}$$

又

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

所以

$$-\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right)dz = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_z}{\partial z}dz = A_z(x, y, z) - A_z(x, y, z_0) \tag{3—142}$$

将式(3—142)代入式(3—141)得

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} = A_z(x, y, z_0) \tag{3—143}$$

令 $h = 0$，则

$$g = \int_{x_0}^{x} A_z(x, y, z_0)dx$$

令 $g = 0$，则

$$h = \int_{y_0}^{y} A_z(x, y, z_0) dy$$

因此，只需要 $\boldsymbol{F}$ 具有如下的形式：

$$\boldsymbol{F} = \left[\int_{z_0}^{z} A_y(x, y, z) dz\right]\boldsymbol{i} + \left[-\int_{z_0}^{z} A_x(x, y, z) dz + \int_{x_0}^{x} A_z(x, y, z) dx\right]\boldsymbol{j} \tag{3—144}$$

或

$$\boldsymbol{F} = \left[\int_{z_0}^{z} A_y(x, y, z) dz - \int_{y_0}^{y} A_z(x, y, z) dy\right]\boldsymbol{i} - \left[\int_{z_0}^{z} A_x(x, y, z) dz\right]\boldsymbol{j} \tag{3—145}$$

则

$$\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{F}$$

证毕。

§3.7　二次微分运算及若干应用

一　基本的二次微分运算

$\nabla\varphi$，$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$，$\nabla \times \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A} \cdot \nabla$ 等称为一次微分运算。因为 $\nabla\varphi$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ 是矢量，我们可以对它们作散度和旋度的运算，于是又出现了四种运算：$\nabla \cdot (\nabla\varphi)$，$\nabla \times (\nabla\varphi)$，$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})$，$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$；而 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 是标量，只能对它进行梯度运算：$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$。

以上五种是基本的二次微分运算。前面我们已经讨论过了其中的三种：

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$$

下面再继续讨论剩下的两种运算，我们先写出结果，然后进行证明。

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A} \tag{3—146}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + \Delta \boldsymbol{A} \tag{3—147}$$

只要证明了式(3—146)，移项即可得到式(3—147)。

证明 我们先来计算$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$在$x$轴的分量：

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_x &= \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \boldsymbol{A})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \boldsymbol{A})_y \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}$$

在等式右端加减$\partial^2 A/\partial x^2$后得

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_x &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \Delta A_x
\end{aligned}$$

同样

$$[\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_y = \frac{\partial}{\partial y}\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \Delta A_y$$

$$[\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_z = \frac{\partial}{\partial z}\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \Delta A_z$$

所以

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= [\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_x \boldsymbol{i} + [\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_y \boldsymbol{j} \\
&\quad + [\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_z \boldsymbol{k} \\
&= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

证毕。

二 格林公式

设φ和ψ是在域D内具有连续二阶导数的两个标函数，我们可以作一新矢量

$$\boldsymbol{A} = \varphi \nabla \psi \tag{3—148}$$

根据散度的性质(2)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \varphi \nabla \cdot \nabla \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \\
&= \varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi
\end{aligned} \tag{3—149}$$

应用高斯公式

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = \oiint_s \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} ds$$

式中 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$ 根据式(3—13)并考虑到关系式(3—148)应为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}=\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} \qquad (3—150)$$

将式(3—149)、(3—150)代入式(3—68)，我们就得到格林的第一公式

$$\iiint_V(\varphi\nabla\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)dV=\oiint_s\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds \qquad (3—151)$$

将式(3—151)中的 φ 和 ψ 的位置互换得

$$\iiint_V(\psi\Delta\varphi+\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)dV=\oiint_s\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds \qquad (3—152)$$

用式(3—151)减去式(3—152)便得到格林的第二公式：

$$\iiint_V(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)dV=\oiint_s\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds \qquad (3—153)$$

当 $\varphi=\psi$ 时，由式(3—151)便得到格林的第三公式：

$$\iiint_V[\varphi\Delta\varphi+(\nabla\varphi)^2]dV=\oiint_s\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds \qquad (3—154)$$

若 $\varphi=1$，则式(3—153)变成

$$\iiint_V\Delta\psi dV=\oiint_s\frac{\partial\psi}{\partial n}ds \qquad (3—155)$$

若 ψ 是一个调和函数，即 $\Delta\psi=0$，则式(3—155)变成

$$\oiint_s\frac{\partial\psi}{\partial n}ds=0 \qquad (3—156)$$

对于矢量场的问题，还有一个很有用的矢量格林公式，它可以仿照标量的格林公式 (3—153) 导出。设 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 是在域 D 内具有连续二阶导数的两个矢函数，我们作一新矢量：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\times\nabla\times\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q} \qquad (3—157)$$

取式(3—157)的散度并利用式(3—130)的关系得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}&=\nabla\cdot[\boldsymbol{Q}\times\nabla\times\boldsymbol{P}]-\nabla\cdot[\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q}]\\&=\boldsymbol{P}\cdot[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{Q})]-\boldsymbol{Q}\cdot[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{P})]\end{aligned}$$

应用高斯公式(3—68)得

$$\begin{aligned}&\iiint_V\{\boldsymbol{P}\cdot[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{Q})]-\boldsymbol{Q}\cdot[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{P})]\}dV\\&=\oiint_s[\boldsymbol{Q}\times(\nabla\times\boldsymbol{P})-\boldsymbol{P}\times(\nabla\times\boldsymbol{Q})]\cdot\boldsymbol{n}ds\end{aligned} \qquad (3—158)$$

式(3—158)就是我们要求的矢量格林公式。

三　静电荷系的能量计算

静电场是一个势场，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与电位函数 φ 之间的关系为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$$

若电场是由位于原点的一个点电荷 q 所产生，则电位函数为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{R}|}$$

作用于电荷 q_1 上的力等于

$$\boldsymbol{F} = q_1\boldsymbol{E} = -q_1\nabla\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{R}|}\right)$$

现在我们来计算将电荷 q_1 从无限远处移至某一位置 $P(\boldsymbol{R})$ 所需要的功。此功应该等于当电荷由 P 点移到无限远处时力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功，即

$$W = \int_P^\infty \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{R} = -q_1\int_P^\infty \nabla\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{R}|}\right)\cdot d\boldsymbol{R}$$

$$= \frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{R}|} \qquad (3—159)$$

所得的功可称为两电荷的位能。

对于一个由位于 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，各点的电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$，所组成的电荷系来说，它们的位能应为

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_i q_k}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{R}_{ik}|} \qquad (3—160)$$

式中 $|\boldsymbol{R}_{ik}|$ 是 P_i 与 P_k 两点间的距离。因为 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 对于所有的电荷都只计算一次，而在和式里 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的组合要遇到两次，故在式(3—160)中应该取系数 1/2。

在 P 点的电位为

$$\varphi_P = \sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{R}_k|} \qquad (3—161)$$

式中 $|\boldsymbol{R}_k|$ 是 P_k 点到 P 点的距离。

在电荷为 q_i 的 P_i 点，除 q_i 外其余的电荷在 P_i 点产生的电位为

$$\varphi_i = \varphi(P_i) = \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{R}_{ik}|} \qquad (3—162)$$

式 (3—162) 中的和式上加一撇表示求和时应该除去 $k=i$ 的值。我们把式(3—160)改写成

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\left(\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{R}_{ik}|}\right) \qquad (3—163)$$

将式(3—162)代入式(3—163)得

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\varphi_i \tag{3—164}$$

当电荷是连续分布在某一体积 V 内时，设电荷密度为 ρ，在体积元 dV 内的电荷为 ρdV，在该体积元内的电位为 φ，则式(3—164)变成了积分形式：

$$W=\frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi dV \tag{3—165}$$

因为在体积 V 以外的电荷密度 $\rho=0$，所以式(3—165)可以写成如下形式：

$$W=\frac{1}{2}\iiint_{V'} \rho\varphi dV \tag{3—166}$$

式中 V' 是包括体积 V 在内的任意一个体积。

将式(3—71)代入式(3—166)得

$$W=\frac{1}{2}\iiint_{V'}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})\varphi dV \tag{3—167}$$

又利用散度的性质(2)得

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})=\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi$$

即

$$\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})-\boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi$$

将上式代入式(3—167)得

$$W=\frac{1}{2}\iiint_{V'}[\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})]dV-\frac{1}{2}\iiint_{V'}\boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi dV \tag{3—168}$$

利用高斯公式(3—68)，式(3—168)中的第一项可以用 $\varphi\boldsymbol{D}$ 在包围该区域的闭合面 s 上的面积分代替。若取 s 为一球面，其半径为 R，使 R 趋于无限大并设各电荷之间的距离为有限值，由于 φ 正比于 $1/R$，$\boldsymbol{D}$ 正比于 $1/R^2$，球面积 s 正比于 R^2，因此当 R 无限增大时，面积分将趋于零，即

$$\iiint_{V'}\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})dV=\oint\!\!\!\oint_{s'\to\infty}\varphi\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}=0$$

于是式(3—168)变为

$$W=-\frac{1}{2}\iiint_{V'\to\infty}(\boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi)dV=\frac{1}{2}\iiint_{V'\to\infty}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})dV \tag{3—169}$$

式中的积分区域包括了整个空间。

式 (3—169) 表明，能量存在于电场里，每个体积元 dV 内包含的能量为

$$dW = \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} dV \tag{3—170}$$

单位体积内包含的能量为

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \tag{3—171}$$

式中 w 称为能量密度。

§3.8 麦克斯韦方程组

前面讨论过的静电场和恒定电流所产生的磁场都是属于稳定场，它们都不随时间而变化。现在我们来讨论关于交变电磁场的基本现象：变化的磁场会产生电场，而变化的电场又会产生磁场。定量描述这种现象的公式称为麦克斯韦方程组。

完整的麦克斯韦方程组包括如下的七个方程：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{3—172}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3—173}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{3—174}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3—175}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{3—176}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{3—177}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{3—178}$$

根据以上的麦克斯韦方程组的微分形式很容易导出它的积分形式。我们分别将式 (3—174) 和 (3—175) 对体积 V 积分并应用高斯定理得

$$\oint\!\!\!\oint_s \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} = \iiint_V \rho dV \tag{3—179}$$

和

$$\oint\!\!\!\oint_s \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = 0 \tag{3—180}$$

方程 (3—179) 是我们熟悉的电学高斯定律的积分形式〔见式

(3—69)〕，当场是时间的函数时，我们可以这样来理解，在某一时刻从闭合面 s 流出的通量等于在该时刻闭合面所围成的体积内的电荷。

方程(3—180)表明，磁场的面积分(即从闭合面 s 流出的总磁通量)在任何时候都等于零。这说明自然界里不存在磁荷。

我们再分别用式(3—173)、(3—172)对曲面 s 积分并应用斯托克斯定理得

$$\oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_s \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{3—181}$$

和

$$\oint_c \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_s \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{s} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_s \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{3—182}$$

方程(3—181)是法拉弟电磁感应定律，它表明电场强度沿闭合路径的线积分(电动势)等于穿过该路径的磁通对时间变化率的负值。

方程(3—182)是普遍化了的安培定律，亦称为麦克斯韦一安培定律，它包括了麦克斯韦的位移电流项。该方程表明，磁场强度沿闭合路径的线积分(磁动势)等于穿过该路径的电流(包括传导电流和位移电流)。

仔细观察麦克斯韦方程组(3—172)～(3—175)就会发现，方程(3—175)可以从方程(3—173)导出，为此我们作式(3—173)的散度得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{B})$$

由式(3—137)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = 0$$

故

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) = 0$$

令对时间的积分常数等于零，则

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

由于这个原因，有时把式(3—172)～(3—174)称为麦克斯韦的独立方程，而把式(3—175)称为非独立方程。

作式(3—172)的散度并考虑到关系式(3—137)得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0$$

即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{D})$$

将式(3—174)代入上式得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3—183}$$

此即为我们在§3.5里导出过的连续性方程(3—107)。

在求解电磁场的微分方程时，我们经常利用位函数作为工具。位函数只是在求解过程中有用，在结果里并不出现。在静态场里，我们引入了标函数 φ（电位）和矢函数 $\boldsymbol{A}$（磁位），利用某种形式对位函数求导即可得到场强的表达式。在交变电磁场里，我们也可以找到更一般的位函数，这种位函数是用交变电荷和交变电流表示出来。但是，在交变场的情况下，电场不能单独用一标电位的梯度来表示，如能这样，则电场强度的旋度必定为零，实际上电场强度的旋度应该等于 $-\partial \boldsymbol{B}/\partial t$。同样，电场强度也不能单独用一矢量磁位来表示，如能这样，则电场强度的散度必定为零，实际上电场强度的散度应该等于 ρ/ε。

在交变电磁场的情况下，磁通密度的散度等于零，因此可令

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{3—184}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 是某一矢量磁位。

将式(3—184)代入式(3—173)得

$$\nabla \times \left[\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right] = 0 \tag{3—185}$$

根据式(3—136)，我们可令

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

即

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3—186}$$

由此可见，在交变场的情况下，电场可以用一个矢性位 $\boldsymbol{A}$ 和一个标位 φ 来表示。将式(3—186)代入式(3—174)得

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3—187}$$

再将式(3—184)和式(3—186)代入式(3—172)得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{J}+\mu\varepsilon\left[-\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right]$$

利用式(3—146),上式变成

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{J}-\mu\varepsilon\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} \tag{3—188}$$

应当指出,在式(3—184)里,我们只规定了矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的旋度,这还不能完全确定矢量 $\boldsymbol{A}$,要在某一体积 V 内唯一确定一个矢量 $\boldsymbol{A}$,必须具备以下三个条件:

(1) $\nabla\times\boldsymbol{A}=G$ (3—189)

(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=h$ (3—190)

(3) $\boldsymbol{A}$ 在包围域 D 的界面 s 上任一点 P 的法线分量为已知,即

$$A_n=f(P) \tag{3—191}$$

证明 假设在体积 V 内有两个矢量 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 满足如下的条件:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_1=h$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{G}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_2=h$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{G}$$

在体积 V 的界面 s 上

$$A_{1n}=f(P)$$

$$A_{2n}=f(P)$$

令

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2$$

则在体积 V 内

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}_1-\nabla\cdot\boldsymbol{A}_2=h-h=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{A}_1-\nabla\times\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}=0$$

由斯托克斯定理的推论(2)得

$$\boldsymbol{F}=\nabla\varphi \tag{3—192}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi=0 \tag{3—193}$$

在 s 面上

$$b_n=A_{1n}-A_{2n}=f(P)-f(P)=0$$

因此

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}=0 \tag{3—194}$$

将式(3—193)、(3—194)代入格林第三公式(3—154)得

$$\iiint_V (\nabla \varphi)^2 dV = 0$$

所以

$$\nabla \varphi = 0$$

代入式(3—192)得

$$\boldsymbol{F}=0$$

因此 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 必是同一矢量。

根据上述的讨论，为了唯一地确定矢量磁位 A，我们再规定

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{3—195}$$

把式(3—195)代入式(3—187)得

$$\nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3—196}$$

再将式(3—195)代入式(3—188)得

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\mu\boldsymbol{J} \tag{3—197}$$

式(3—196)、(3—197)表明，位函数 φ 和 $\boldsymbol{A}$ 可以由电荷密度 ρ 和电流密度 $\boldsymbol{J}$ 确定。

如果对时间的导数为零，即为稳定场的情况，则式(3—196)、(3—186)、(3—197)、(3—184)简化成

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi \tag{3—198}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3—199}$$

式(3—198)、(3—199)即为静态场的关系式。

当 ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 等于零时，式(3—196)和式(3—197)变成

$$\nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{3—200}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{3—201}$$

式(3—200)、(3—201)一般称为波动方程。

§3.9 梯度、散度和旋度的不变性

在结束本章之前，我们来证明梯度、散度和旋度的定义与所选择的坐标系统无关。下面证明梯度的不变性。关于散度和旋度的不变性，可以仿此证明。

由梯度公式(3—78)

$$\oint\!\!\!\oint_s f d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla f dV \tag{3—202}$$

因为 $fd\mathbf{s}$ 并不决定于所选择的坐标系，设 $(\nabla f)_1$ 是在新坐标系里的梯度，式(3—202)左端仍然不变，故

$$\iiint_V (\nabla f)_1 dV = \iiint_V \nabla f dV$$

即

$$\iiint_V [\nabla f - (\nabla f)_1] dV = 0 \tag{3—203}$$

式(3—203)对于任何体积都成立，故 ∇f 应等于 $(\nabla f)_1$ 因为如果在体积 V 内某一点的 $(\nabla f)_1$ 不等于 ∇f，则我们可以围绕该点作一很小的体积，在此体积内使 $\nabla f - (\nabla f)_1$ 不等于零并且保持同样的正负号(由于偏导数是连续的)，于是对这个体积的积分：

$$\iiint_V [\nabla f - (\nabla f)_1] dV \neq 0$$

与式(3—203)相矛盾，故

$$\nabla f = (\nabla f)_1 \tag{3—204}$$

证毕。

第四章　　曲线坐标系

矢量运算的主要优点之一是没有参考任何具体的坐标系，而矢量的坐标表示式却随不同的坐标系具有不同的形式。在第三章里，我们已经详细地讨论过在直角坐标系里的各种微分运算问题，但在实际应用中，只使用直角坐标系是不够的，还需要使用其它的坐标系。

本章的主要内容是讨论坐标系的一般特性；在曲线坐标系里的梯度、散度和旋度等微分运算和实际使用的各种正交曲线坐标系。

§4.1　曲线坐标系的一般特性

一　坐标系的变换

设 u^1, u^2, u^3 是一个新的坐标系，在空间域 D 内，新坐标系与直角坐标系间之关系为

$$u^1 = f_1(x, y, z), \qquad u^2 = f_2(x, y, z)$$
$$u^3 = f_3(x, y, z) \tag{4—1}$$

或简写成

$$u^i = f_i(x, y, z) \qquad i = 1, 2, 3 \tag{4—2}$$

若 f_i 在域 D 内有连续的一阶导数，并且在任一点 $P(x, y, z)$ 满足条件：

$$\frac{\partial(u^1, u^2, u^3)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial x} & \dfrac{\partial u^1}{\partial y} & \dfrac{\partial u^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial x} & \dfrac{\partial u^2}{\partial y} & \dfrac{\partial u^2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u^3}{\partial x} & \dfrac{\partial u^3}{\partial y} & \dfrac{\partial u^3}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4—3}$$

则由式(4—1)或(4—2)可以唯一地解出 x, y, z。式(4—3)称为雅可比行列式或函数行列式。

由式(4—1)可解出 x,y,z,即存在函数 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$,使得

$$x=\varphi_1(u^1,\ u^2,\ u^3),\qquad y=\varphi_2(u^1,\ u^2,\ u^3)$$
$$z=\varphi_3(u^1,\ u^2,\ u^3)\tag{4—4}$$

式中 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 在域 D 内也具有连续的一阶导数,并且

$$\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(u^1,\ u^2,\ u^3)}\neq 0\tag{4—5}$$

根据雅可比行列式的性质:

$$\frac{\partial(u^1,\ u^2,\ u^3)}{\partial(x,\ y,\ z)}\cdot\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(u^1,\ u^2,\ u^3)}=1\tag{4—6}$$

方程(4—1)称为坐标变换式,而方程(4—4)叫坐标逆变换式。式(4—6)表明,坐标变换的雅可比行列式和它的逆变换雅可比行列式互为倒数。在式(4—1)定义的坐标系里,设 P_0 点的坐标为 (u_0^1,u_0^2,u_0^3) ,则

$$f_1(x,\ y,\ z)=u_0^1,\qquad f_2(x,\ y,\ z)=u_0^2$$
$$f_3(x,\ y,\ z)=u_0^3\tag{4—7}$$

式(4—7)代表通过 P_0 点的三个曲面(图 4—1),它们是在 P_0

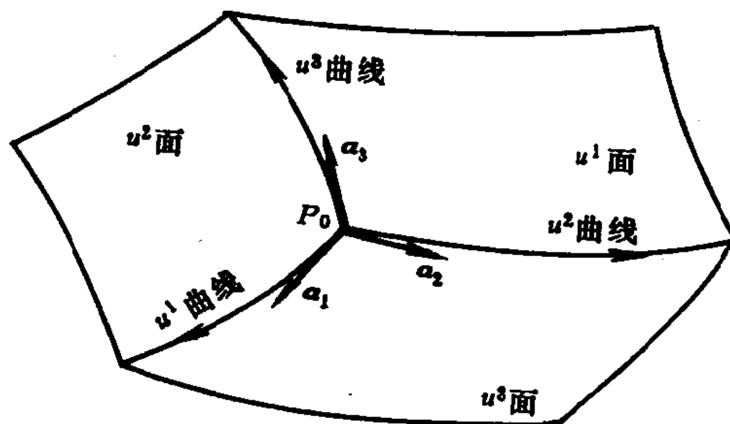


图 4—1

点相交的三个坐标面,与直角坐标系中的 $x=x_0,y=y_0,z=z_0$ 的坐标平面相对应。这里的 (x_0,y_0,z_0) 表示 P_0 点的直角坐标。

显然,任何两个坐标面相交成一条曲线,此曲线称为坐标曲线。例如,$f_2(x,y,z)=u_0^2$ 和 $f_3(x,y,z)=u_0^3$ 的两个坐标面相交的曲线只有 u^1 能够变化,故称为 u^1 坐标曲线,简称 u^1 曲线。同样可以定义出 u^2 曲线和 u^3 曲线,如图 4—1 所示。

二　酉矢量和互易矢量

假定 $\boldsymbol{R}$ 表示坐标原点到 $P(x,y,z)$ 点的位置矢量，它是曲线坐标 (u^1,u^2,u^3) 的函数，即

$$\boldsymbol{R}(u^1,u^2,u^3)=\varphi_1(u^1,u^2,u^3)\boldsymbol{i}+\varphi_2(u^1,u^2,u^3)\boldsymbol{j}+\varphi_3(u^1,u^2,u^3)\boldsymbol{k} \tag{4—8}$$

若设 $u^2=c_2$，$u^3=c_3$（c_2 和 c_3 均为常数），则矢量函数 $\boldsymbol{R}(u^1,c_2,c_3)$ 代表 u^1 曲线，偏导数 $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u^1}$ 代表该曲线的切线矢量。同样，$\partial \boldsymbol{R}/\partial u^2$ 和 $\partial \boldsymbol{R}/\partial u^3$ 分别代表 u^2 和 u^3 曲线的切线矢量。

因为矩阵和它的转置矩阵具有相同的行列式，根据雅可比行列式和三个矢量的混合积定义可得

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u^1,u^2,u^3)}=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u^2}\times\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u^3}\neq 0 \tag{4—9}$$

因此，坐标曲线的三个切线矢量 $\partial \boldsymbol{R}/\partial u^1$，$\partial \boldsymbol{R}/\partial u^2$ 和 $\partial \boldsymbol{R}/\partial u^3$ 不共面，它们可以构成一个基础系（或称为基底系）。矢量

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u^1},\quad \boldsymbol{a}_2=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u^2},\quad \boldsymbol{a}_3=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u^3} \tag{4—10}$$

代表与 P 点有关的酉矢量（或称为基矢量）。

以后，我们规定坐标曲线 u^1,u^2,u^3 使酉矢量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$（按此顺序）形成一个右手法则系统，这将意味着雅可比行列式 $\partial(x,y,z)/\partial(u^1,u^2,u^3)$ 在空间域 D 内是正的。

由于 $\boldsymbol{R}$ 是曲线坐标 u^1,u^2,u^3 的函数，故

$$d\boldsymbol{R}=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u^1}du^1+\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u^2}du^2+\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u^3}du^3 \tag{4—11}$$

将式(4—10)代入式(4—11)得

$$d\boldsymbol{R}=\boldsymbol{a}_1du^1+\boldsymbol{a}_2du^2+\boldsymbol{a}_3du^3 \tag{4—12}$$

注意，酉矢量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 不一定是单位矢量，它们的方向代表在 P 点的坐标曲线切线方向并随 P 点的位置变化而变化，它们的大小决定于曲线坐标的性质。这是曲线坐标和直角坐标之间的根本区别。

三个基矢量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 形成了一个平行六面体。其体积为

$$V=\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)=\boldsymbol{a}_2\cdot(\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{a}_3\cdot(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2) \tag{4—13}$$

根据式(4—13)，我们又可以定义出三个新的矢量 $\boldsymbol{a}^1,\boldsymbol{a}^2,\boldsymbol{a}^3$，它们与 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 之间的关系为

$$a^1 = \frac{1}{V}(a_2 \times a_3), \qquad a^2 = \frac{1}{V}(a_3 \times a_1)$$

$$a^3 = \frac{1}{V}(a_1 \times a_2) \tag{4—14}$$

式（4—14）表明，新定义的 a^1, a^2, a^3 分别垂直于由（a_2, a_3），（a_3, a_1），（a_1, a_2）所决定的平面。

注意，酉矢量 a_1 并不一定垂直于（a_2, a_3）所决定的平面，因此 a_1 与 a^1 并不一定同向。同样，a_2 与 a^2，a_3 与 a^3 也不一定同向。

如果用酉矢量 a_j 点乘式（4—14）的各个等式，则得可能组成的全部标积 $a^i \cdot a_j$ 的形式。例如，用 a_1 点乘式(4—14)第一式得

$$a^1 \cdot a_1 = \frac{a_2 \times a_3}{V} \cdot a_1 = \frac{V}{V} = 1$$

用 a_1 点乘式(4—14)第二式得

$$a^2 \cdot a_1 = \frac{a_3 \times a_1}{V} \cdot a_1 = 0$$

于是

$$a^i \cdot a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4—15}$$

若用 a^1 叉乘式(4—14)第二式，则得

$$a^1 \times a^2 = a^1 \times \frac{a_3 \times a_1}{V}$$

$$= \frac{1}{V}[a_3(a^1 \cdot a_1) - a_1(a^1 \cdot a_3)]$$

考虑到式(4—15)，上式变成

同样

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= V(a^1 \times a^2) \\ a_2 &= V(a^3 \times a^1) \\ a_1 &= V(a^2 \times a^3) \end{aligned}\right\} \tag{4—16}$$

由方程(4—13)～(4—16)联系起来的两组不共面矢量称为互易系统。矢量组 a^1, a^2, a^3 称为互易矢量。它们与酉矢量 a_1, a_2, a_3 同样可以组成一基础系统。

若用互易酉矢量 a^1, a^2, a^3 作为基础系，则位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 的微分变为

$$d\boldsymbol{R} = a^1 du_1 + a^2 du_2 + a^3 du_3 \tag{4—17}$$

式中 du_1, du_2, du_3 是 $d\boldsymbol{R}$ 在新基矢量 a^1, a^2, a^3 方向的分量。

由方程(4—12)、(4—17)得

$$dR=\sum_{i=1}^{3}a_i du^i=\sum_{j=1}^{3}a^j du_j \tag{4—18}$$

依次用 a^i 与 a_j 点乘式(4—18)并考虑到式(4—15)的关系，我们便得到 dR 在两个互易系统中各个基矢量方向分量之间的关系

$$\left.\begin{aligned}du_j&=\sum_{i=1}^{3}a_j\cdot a_i du^i\\ du^i&=\sum_{j=1}^{3}a^i\cdot a^j du_j\end{aligned}\right\} \tag{4—19}$$

标积 $a_i\cdot a_j$ 和 $a^i\cdot a^j$ 习惯上用下述符号表示：

$$g_{ij}=a_i\cdot a_j=g_{ji} \tag{4—20}$$

$$g^{ij}=a^i\cdot a^j=g^{ji} \tag{4—21}$$

因此式(4—19)变成

$$\left.\begin{aligned}du_j&=\sum_{i=1}^{3}g_{ij}du^i\\ du^i&=\sum_{j=1}^{3}g^{ij}du_j\end{aligned}\right\} \tag{4—22}$$

把式(4—22)代入式(4—18)，我们得到西矢量与互易矢量之间的关系：

$$\left.\begin{aligned}a^j&=\sum_{i=1}^{3}g^{ij}a_i\\ a_i&=\sum_{j=1}^{3}g_{ij}a^j\end{aligned}\right\} \tag{4—23}$$

三　逆变矢量与协变矢量

若矢量 F 在基矢量 a_1,a_2,a_3 系统中的分量为 f^1,f^2,f^3，即

$$F=f^1a_1+f^2a_2+f^3a_3=\sum_{i=1}^{3}f^ia_i \tag{4—24}$$

则 f^1,f^2,f^3 称为矢量 F 的逆变分量，而矢量 $F=\sum_{i=1}^{3}f^ia_i$ 称为逆变矢量。

若西矢量 a_1,a_2,a_3 的互易矢量为 a^1,a^2,a^3，矢量 F 在互易矢量 a^1,a^2,a^3 系统中的分量为 f_1,f_2,f_3，即

$$F=f_1a^1+f_2a^2+f_3a^3=\sum_{j=1}^{3}f_ja^j \tag{4—25}$$

则 f_1, f_2, f_3 称为矢量 $\boldsymbol{F}$ 的协变分量，而矢量 $\boldsymbol{F}=\sum_{j=1}^{3} f_j \boldsymbol{a}^j$ 称为协变矢量。

在直角坐标系统里，矢量的逆变分量与协变分量是一致的。

根据式(4—22)，f_j 和 f^i 的关系为

$$f_j=\sum_{i=1}^{3} g_{ji} f^i, \qquad f^i=\sum_{j=1}^{3} g^{ij} f_j \tag{4—26}$$

用 $\boldsymbol{a}^i$ 点乘式(4—24)并考虑到关系式(4—15)得

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}^i=f^i \tag{4—27}$$

同样，用 $\boldsymbol{a}_j$ 点乘式(4—25)得

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}_j=f_j \tag{4—28}$$

把式(4—27)、(4—28)分别代入式(4—24)、(4—25)得

$$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}^i) \boldsymbol{a}_i=\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}_j) \boldsymbol{a}^j \tag{4—29}$$

前已指出，酉矢量的长度决定于曲线坐标系的性质，我们按下式定义一组单位矢量：

$$\boldsymbol{i}_1=\frac{\boldsymbol{a}_1}{\sqrt{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1}}=\frac{\boldsymbol{a}_1}{\sqrt{g_{11}}} \qquad \boldsymbol{i}_2=\frac{\boldsymbol{a}_2}{\sqrt{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2}}=\frac{\boldsymbol{a}_2}{\sqrt{g_{22}}}$$

$$\boldsymbol{i}_3=\frac{\boldsymbol{a}_3}{\sqrt{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_3}}=\frac{\boldsymbol{a}_3}{\sqrt{g_{33}}} \tag{4—30}$$

单位矢量 $\boldsymbol{i}_i$ 与 $\boldsymbol{a}_i$ 方向相同。矢量 $\boldsymbol{F}$ 用单位矢量表示为

$$\boldsymbol{F}=F_1 \boldsymbol{i}_1+F_2 \boldsymbol{i}_2+F_3 \boldsymbol{i}_3 \tag{4—31}$$

使式(4—31)与式(4—24)相等并考虑到关系式(4—30)得

$$F_i \boldsymbol{i}_i=F_i \frac{\boldsymbol{a}_i}{\sqrt{g_{ii}}}=f^i \boldsymbol{a}_i$$

即

$$F_i=\sqrt{g_{ii}} f^i \tag{4—32}$$

四　度规系数

位矢量的微分 $d\boldsymbol{R}$ 代表从 $P(u^1, u^2, u^3)$ 点到相邻点 $(u^1+du^1, u^2+du^2, u^3+du^3)$ 的无限小位移量，其大小我们用 ds 表示，于是

$$ds^2=d\boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j du^i du^j$$

$$=\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}^j du_i du_j \tag{4—33}$$

用式(4—20)、(4—21)的符号代入式(4—33)得

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} du^i du^j = \sum_{i,j=1}^{3} g^{ij} du_i du_j \qquad (4\text{—}34)$$

式中 g_{ij} 和 g^{ij} 通称为曲线坐标系 u^i 和它的互易坐标系 u_i 的空间度规系数。

下面，我们来计算在曲线坐标系里的线元、面积元和体积元的公式。

在式(4—12)中令

$$d\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{a}_1 du^1,\ d\boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{a}_2 du^2,\ d\boldsymbol{s}_3 = \boldsymbol{a}_3 du^3 \qquad (4\text{—}35)$$

它们分别表示沿 u^1 曲线、u^2 曲线、u^3 曲线在 P 点的无限小位移量。

$$\left.\begin{aligned} ds_1 &= |d\boldsymbol{s}_1| = \sqrt{g_{11}}\,du^1 \\ ds_2 &= |d\boldsymbol{s}_2| = \sqrt{g_{22}}\,du^2 \\ ds_3 &= |d\boldsymbol{s}_3| = \sqrt{g_{33}}\,du^3 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{—}36)$$

式中 ds_1, ds_2, ds_3 分别表示在 $P(u^1, u^2, u^3)$ 点沿 u^1 曲线，u^2 曲线，u^3 曲线的无限小位移量。

我们在图 4—2 里画出了一个由 u^2 曲线和 u^3 曲线在 u^1 面上围成的一个平行四边形面积元，其大小为

$$\begin{aligned} dA_1 &= |d\boldsymbol{s}_2 \times d\boldsymbol{s}_3| = |\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3|\,du^2 du^3 \\ &= \sqrt{(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)\cdot(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)}\,du^2 du^3 \end{aligned} \qquad (4\text{—}37)$$

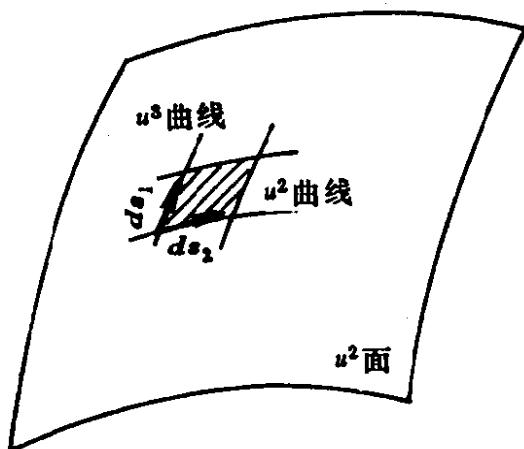


图 4—2

由矢量恒等式：

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \qquad (4\text{—}38)$$

式中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 是四个任意的矢量。式(4—37)根式里的点积可以变成：

$$(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_3)-(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_2)$$

$$=g_{22}g_{33}-g_{23}^2 \qquad (4—39)$$

这样，在 u^1 表面上的面积元为

$$dA_1=\sqrt{g_{22}g_{33}-g_{23}^2}\,du^2du^3 \qquad (4—40)$$

同样，在 u^2 面和 u^3 面上的面积元为

$$dA_2=\sqrt{g_{33}g_{11}-g_{31}^2}\,du^3du^1 \qquad (4—41)$$

$$dA_3=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du^1du^2 \qquad (4—42)$$

由坐标面围成的平行六面体的体积元为

$$dV=d\boldsymbol{s}_1\cdot d\boldsymbol{s}_2\times d\boldsymbol{s}_3=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3du^1du^2du^3 \qquad (4—43)$$

若令式(4—29)里的 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3$，则式(4—29)改写成

$$\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3=(\boldsymbol{a}^1\cdot\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_1+(\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_2$$

$$+(\boldsymbol{a}^3\cdot\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_3 \qquad (4—44)$$

用 $\boldsymbol{a}_1$ 点乘式(4—44)并利用式(4—13)、(4—14)消去 $\boldsymbol{a}^1,\boldsymbol{a}^2,\boldsymbol{a}^3$ 得

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3=\frac{\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3}\cdot[(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_1$$

$$+(\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_2+(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_3]$$

$$(4—45)$$

将圆括号内的量按式(4—38)展开并排列成

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)^2=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1&[(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_3)\\&-(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_2)]\\&+\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2[(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_1)\\&-(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_3)]\\&+\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_3[(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_2)\\&-(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_1)]\end{aligned} \qquad (4—46)$$

若将式(4—46)中圆括号内的标积用 g_{ij} 代替，则式(4—43)表示的体积分简化成

$$dV=\sqrt{g}\,du^1du^2du^3 \qquad (4—47)$$

式中

$$g=\begin{vmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{vmatrix} \qquad (4—48)$$

只要在式(4—36)、(4—40)～(4—42)和式(4—48)中用g^{ij}代替g_{ij}即可得到在互易系统里的线元、面积元和体积元的表示式。

从以上的讨论可知，曲线坐标系的空间几何特性完全由度规系数g_{ij}表征，因此讨论曲线坐标系的一个重要问题是如何确定这些系数。

在直角坐标系里，度规系数为

$$g_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases} \tag{4—49}$$

根据直角坐标系坐标平面的正交性和互易酉矢量的定义式(4—14)，酉矢量和互易酉矢量是相同的，习惯上用$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$表示，它们是单位矢量。把式(4—49)代入式(4—34)、(4—40)～(4—42)和式(4—47)即可得到我们熟悉的形式：

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2 \tag{4—50}$$

$$dA_1=dydz,\quad dA_2=dzdx,\quad dA_3=dxdy \tag{4—51}$$

$$dV=dxdydz \tag{4—52}$$

由式(4—4)，直角坐标系与曲线坐标系之间的变换关系为

$$x=\varphi_1(u^1,u^2,u^3),\ y=\varphi_2(u^1,u^2,u^3)$$

$$z=\varphi_3(u^1,u^2,u^3) \tag{4—53}$$

因此

$$\left.\begin{aligned}dx&=\frac{\partial x}{\partial u^1}du^1+\frac{\partial x}{\partial u^2}du^2+\frac{\partial x}{\partial u^3}du^3\\dy&=\frac{\partial y}{\partial u^1}du^1+\frac{\partial y}{\partial u^2}du^2+\frac{\partial y}{\partial u^3}du^3\\dz&=\frac{\partial z}{\partial u^1}du^1+\frac{\partial z}{\partial u^2}du^2+\frac{\partial z}{\partial u^3}du^3\end{aligned}\right\} \tag{4—54}$$

使式(4—50)和式(4—34)相等得

$$dx^2+dy^2+dz^2=\sum_{i,j=1}^{3}g_{ij}du^idu^j \tag{4—55}$$

把式(4—54)代入式(4—55)并使相同项的系数相等，我们便得到计算空间度规系数的一般关系式：

$$g_{ij}=\frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{\partial x}{\partial u^j}+\frac{\partial y}{\partial u^i}\frac{\partial y}{\partial u^j}+\frac{\partial z}{\partial u^i}\frac{\partial z}{\partial u^j} \tag{4—56}$$

§4.2　对曲线坐标系的微分运算

一　梯度

根据我们在第三章里的定义，数性函数 φ 在 P 点的梯度是一个矢量，它的方向是 φ 在该点变化率为最大值的方向，其大小正好等于该最大变化率的数值。由于位移 $d\boldsymbol{R}$ 引起的 φ 变化为

$$d\varphi=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}du^i$$

由式(3—13)可知

$$d\varphi=\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{R}$$

因此

$$d\varphi=\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}du^i \tag{4—57}$$

因为

$$d\boldsymbol{R}=\boldsymbol{a}_1du^1+\boldsymbol{a}_2du^2+\boldsymbol{a}_3du^3$$

所以 du^i 是 $d\boldsymbol{R}$ 的逆变分量，由式(4—27)

$$du^i=\boldsymbol{a}^i\cdot d\boldsymbol{R} \tag{4—58}$$

把式(4—58)代入式(4—57)得

$$\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\boldsymbol{a}^i\cdot d\boldsymbol{R}$$

即

$$\left(\nabla\varphi-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\boldsymbol{a}^i\right)\cdot d\boldsymbol{R}=0$$

因为 $d\boldsymbol{R}$ 是任意矢量，故

$$\nabla\varphi=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\boldsymbol{a}^i \tag{4—59}$$

式(4—59)表明，在梯度表示式里，互易酉矢量 $\boldsymbol{a}^i$ 成了一个基础系，如果仍然需要用酉矢量 $\boldsymbol{a}_j$ 作为基础系，则应通过式(4—23)把互易酉矢量变换成酉矢量。

二　散度

矢量场 $\boldsymbol{F}(u^1,u^2,u^3)$ 的散度定义为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\lim_{s\to0}\frac{1}{V}\oiint_s\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA \tag{4—60}$$

它表示矢量 $\boldsymbol{F}$ 经过包围 P 点的无限小体积的界面流出的单位体

积通量。下面我们来计算从图 4—3 所示的体积元流出的通量。

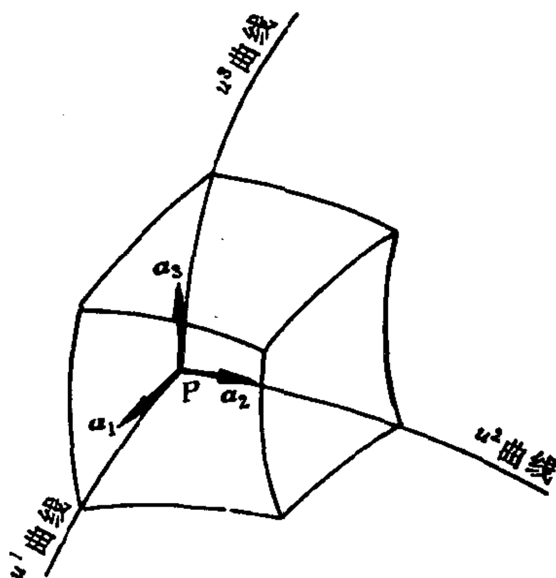


图 4—3

体积元位于 u^2 面上的端面有二：左边的位于 u^2 处，表面积为

$$[dA_2]_{u^2}=[(a_1\times a_3)du^1du^3]_{u^2}$$

它的法线方向朝左（向外）；右边的位于 u^2+du^2 处，表面积为

$$[dA_2]_{u^2+du^2}=[(a_3\times a_1)du^3du^1]_{u^2+du^2}$$

它的法线方向朝右（也是向外）。因此从这两个端面向外流出的净通量应为

$$Q_2=[F\cdot(a_3\times a_1)du^3du^1]_{u^2+du^2}+[F\cdot(a_1\times a_3)du^1du^3]_{u^2}$$

因为 $-a_3\times a_1=a_1\times a_3$，故

$$Q_2=[F\cdot(a_3\times a_1)du^1du^3]_{u^2+du^2}-[F\cdot(a_3\times a_1)du^1du^3]_{u^2}\tag{4—61}$$

式中方括弧的下标表示分别在 u^2+du^2 和 u^2 处计算。当 du^2 足够小时，式(4—61)可近似为

$$Q_2\approx\frac{\partial}{\partial u^2}[F\cdot(a_3\times a_1)du^1du^3du^2]$$

根据式(4—29)

$$F\cdot(a_3\times a_1)=\sum_{i=1}^{3}(F\cdot a^i)a_i\cdot(a_3\times a_1)$$
$$=(F\cdot a^2)a_2\cdot(a_3\times a_1)$$

又由式(4—27)

$$F\cdot a^2=f^2$$

因此

$$(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}^2)\boldsymbol{a}_2 \cdot (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1) = f^2\boldsymbol{a}_2 \cdot (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1)$$

再由式(4—46)

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1 = \sqrt{g}$$

所以

$$\boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1) = f^2\sqrt{g} \qquad (4—62)$$

于是

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}(f^2\sqrt{g})du^1du^2du^3 \qquad (4—63)$$

位于 u^1 面和 u^2 面上的其余两对端面的通量 Q_1 和 Q_2 也可用类似的方法得到。

总通量为

$$Q = Q_1 + Q_2$$

总通量除以 dV〔式(4—47)〕并取极限 $du^1 \to 0$，$du^2 \to 0$，$du^3 \to 0$ 即为 $\boldsymbol{F}$ 在 P 点的散度。因此

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \lim_{s \to 0}\frac{Q}{V} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}(f^i\sqrt{g}) \qquad (4—64)$$

三　旋度

矢量 $\boldsymbol{F}$ 的旋度可以通过计算 $\boldsymbol{F}$ 沿无限小闭合回路的线积分得到。我们知道，旋度在单位法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影等于在该方向的环流面密度，即

$$(\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} = \lim_{c \to 0}\frac{1}{A}\oint_c \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} \qquad (4—65)$$

我们来计算 $\boldsymbol{F}$ 沿 u^1 面上平行四边形面积元周线 c 的环流（图4—4）。平行四边形的边长为 $\boldsymbol{a}_2du^2$ 和 $\boldsymbol{a}_3du^3$，周线 c 的方向使正法线 $\boldsymbol{n}$ 朝着正 u^1 曲线。根据西矢量的定义式（4—14），互易西矢量 $\boldsymbol{a}^1$ 必定垂直于 u^1 面，而 $\boldsymbol{n}$ 表示 u^1 面法线方向的单位矢量，所以

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}^1}{\sqrt{\boldsymbol{a}^1 \cdot \boldsymbol{a}^1}} \qquad (4—66)$$

注意，在一般情况下，西矢量 $\boldsymbol{a}_1$ 并不垂直于 u^1 面。

平行于 u^3 曲线两边的线元 $\boldsymbol{a}_3du^3$ 与矢量 $\boldsymbol{F}$ 的标积为

$$(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}_3du^3)_{u^2+du^2} - (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}_3du^3)_{u^2}$$

当 du^2 很小时，上式可以近似为

$$\frac{\partial}{\partial u^2}(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}_3)du^3du^2$$

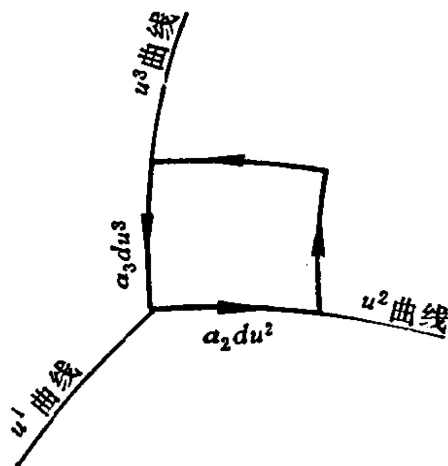


图 4—4

平行于 u^2 曲线底边和顶边的线元 a_2du^2 与矢量 F 的标积为

$$-(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_2du^2)_{u^3+du^3}+(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_2du^2)_{u^3}$$

当 du^3 很小时，上式可以近似为

$$-\frac{\partial}{\partial u^3}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_2)du^2du^3$$

于是 F 沿平行四边形面积元周线 c 的环流为

$$\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_3)-\frac{\partial}{\partial u^3}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_2)\right]du^2du^3 \tag{4—67}$$

平行四边形面积元的面积为

$$A=|\boldsymbol{a}_2du^2\times\boldsymbol{a}_3du^3|=\sqrt{(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)}du^2du^3 \tag{4—68}$$

取极限 $du^2\to 0, du^3\to 0$ 并将式(4—66)、(4—47)和式(4—68)代入式(4—65)得

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\frac{\boldsymbol{a}_1}{\sqrt{\boldsymbol{a}^1\cdot\boldsymbol{a}^1}}=\frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)}}\times\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_3)-\frac{\partial}{\partial u^3}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_2)\right] \tag{4—69}$$

由式(4—14)、(4—13)和式(4—46)得

$$\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}^1[\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)]=\sqrt{g}\,\boldsymbol{a}^1 \tag{4—70}$$

将式(4—70)代入式(4—69)并化简后得

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{a}^1=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_3)-\frac{\partial}{\partial u^3}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_2)\right] \tag{4—71}$$

$\nabla\times F$ 的其余两个分量可以通过置换式 (4—71) 中的指标得

到，它们是

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{a}^2=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u^3}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_1)-\frac{\partial}{\partial u^1}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_3)\right] \tag{4—72}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{a}^3=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_2)-\frac{\partial}{\partial u^2}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_1)\right] \tag{4—73}$$

求得 $(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{a}^i$ 后，将其代入式(4—29)得

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{3}(\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}^i)\boldsymbol{a}_i \tag{4—74}$$

由式(4—28)，在式(4—71)～(4—73)中的

$$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_i)=f_i$$

考虑到上述关系式并把式(4—71)～(4—73)代入(4—74)得

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial u^2}-\frac{\partial f_2}{\partial u^3}\right)\boldsymbol{a}_1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial u^3}-\frac{\partial f_3}{\partial u^1}\right)\boldsymbol{a}_2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial u^1}-\frac{\partial f_1}{\partial u^2}\right)\boldsymbol{a}_3\right] \tag{4—75}$$

四 拉普拉斯算子

拉普拉斯算子 $\nabla^2\varphi$ 代表 $\nabla\cdot\nabla\varphi$。我们令 $\boldsymbol{F}=\nabla\varphi$ 并代入式(4—64)得

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}(\nabla\varphi^i\sqrt{g}) \tag{4—76}$$

式中 $\nabla\varphi^i$ 是梯度的逆变分量。

由式(4—59)

$$\nabla\varphi^i=\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{a}^i=\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{a}^i\cdot\boldsymbol{a}^j\frac{\partial\varphi}{\partial u^j}=\sum_{j=1}^{3}g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial u^j} \tag{4—77}$$

于是

$$\nabla^2\varphi=\nabla\cdot\nabla\varphi=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial\varphi}{\partial u^j}\right) \tag{4—78}$$

§4.3 正交坐标系

到目前为止，我们对基矢量所加的限制仅仅是它们必须不共面。在一般情况下，坐标轴之间不相互垂直。虽然这种不正交的坐标系可能最具有实际意义，但由它们导出的偏微分方程到现在

还不能用分析的方法得到解答。因此，几乎在所有的实际应用中都只采用正交坐标系。对于正交坐标系，上节导出的公式可以大为简化。

正交坐标系是指它的酉矢量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 相互垂直，即坐标轴在空间的每一点都正交。在这种情况下

$$\boldsymbol{a}^i = \frac{1}{\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}^i}\boldsymbol{a}_i = \frac{1}{g_{ii}}\boldsymbol{a}_i \tag{4—79}$$

上式表明，酉矢量和互易酉矢量互相平行，大小互为倒数。并且

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_1 = 0 \\ g_{ij} = 0 \qquad (i \neq j) \end{aligned}\right\} \tag{4—80}$$

在正交坐标系里，度规系数习惯上采用如下的符号

$$h_1 = \sqrt{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1} = \sqrt{g_{11}},\ h_2 = \sqrt{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2} = \sqrt{g_{22}}$$

$$h_3 = \sqrt{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_3} = \sqrt{g_{33}} \tag{4—81}$$

由式(4—56)得

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u^i}\right)^2 \tag{4—82}$$

将式(4—81)代入式(4—36)、(4—40)～(4—42)和式(4—47)得在正交坐标系里线元、面积元和体积元表示式：

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2$$

$$ds_1 = h_1 du^1, \quad ds_2 = h_2 du^2, \quad ds_3 = h_3 du^3 \tag{4—83}$$

$$\left.\begin{aligned} dA_1 = h_2 h_3 du^2 du^3 \\ dA_2 = h_3 h_1 du^3 du^1 \\ dA_3 = h_1 h_2 du^1 du^2 \end{aligned}\right\} \tag{4—84}$$

$$dV = \sqrt{g}\, du^1 du^2 du^3 \tag{4—85}$$

行列式 g〔式(4—48)〕的所有非对角线都等于零，故

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \tag{4—86}$$

在实际运算中，在正交坐标系里应用单位基矢量 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2$ 和 $\boldsymbol{i}_3$ 最为方便，由式(4—30)、(4—79)和式(4—81)得

$$\boldsymbol{i}_i = \frac{\boldsymbol{a}_i}{h_i} = h_i \boldsymbol{a}^i \tag{4—87}$$

即

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_i = h_i \boldsymbol{i}_i \\ \boldsymbol{a}^i = \frac{1}{h_i}\boldsymbol{i}_i \end{aligned}\right\} \tag{4—88}$$

矢量 $\boldsymbol{F}$ 表示为

$$\boldsymbol{F}=F_1\boldsymbol{i}_1+F_2\boldsymbol{i}_2+F_3\boldsymbol{i}_3 \tag{4—89}$$

根据正交性

$$\boldsymbol{i}_i\cdot\boldsymbol{i}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & j=k\end{cases} \tag{4—90}$$

由式(4—32)和式(4—26)得到用 F_i 表示的逆变分量和协变分量

$$f^i=\frac{1}{h_i}F_i,\qquad f_i=h_iF_i \tag{4—91}$$

对于正交坐标系的梯度、散度、旋度和拉普拉斯算子可以直接由上节的结果导出。

把式(4—88)代入式(4—59)得

$$\nabla\varphi=\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\boldsymbol{i}_j \tag{4—92}$$

把式(4—86)、(4—91)代入式(4—64),矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(h_2h_3F_1)+\frac{\partial}{\partial u^2}(h_3h_1F_2)+\frac{\partial}{\partial u^3}(h_1h_2F_3)\right] \tag{4—93}$$

把式(4—86)、(4—88)和式(4—91)代入式(4—75),矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度为

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{F}=&\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(h_3F_3)-\frac{\partial}{\partial u^3}(h_2F_2)\right]\boldsymbol{i}_1\\&+\frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u^3}(h_1F_1)-\frac{\partial}{\partial u^1}(h_3F_3)\right]\boldsymbol{i}_2\\&+\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(h_2F_2)-\frac{\partial}{\partial u^2}(h_1F_1)\right]\boldsymbol{i}_3\end{aligned} \tag{4—94}$$

式(4—94)也可以表示成行列式的形式:

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\boldsymbol{i}_1 & h_2\boldsymbol{i}_2 & h_3\boldsymbol{i}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3}\\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3\end{vmatrix} \tag{4—95}$$

把式(4—80)、(4—81)和(4—86)代入式(4—78),数性函数 φ 的拉普拉斯算子表示为

$$\nabla^2\varphi=\nabla\cdot\nabla\varphi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\right)\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}\right)+\frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u^3}\right)\Bigg] \qquad (4—96)$$

在第三章里，我们还讨论过在分析场时会经常遇到的算子〔式(3—147)〕，即

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{F}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{F}-\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{F} \qquad (4—97)$$

对于直角坐标系，算子$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{F}$相当于

$$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{F}=\nabla^2\boldsymbol{F}=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2F_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F_i}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{i}_j \qquad (4—98)$$

它表示拉普拉斯算子作用于矢量$\boldsymbol{F}$的各个直角分量。对于曲线坐标系，$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{F}$还可以表示成行列式形式（见下页公式（4—99））。

于是，在曲线坐标系的矢量$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{F}$可以从式（4—97）中$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{F}$中减去$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{F}$得到。并且，结果与拉普拉斯算子直接作用于$\boldsymbol{F}$在曲线坐标里的各个分量之和不相同。

§4.4 在正交坐标系里的麦克斯韦方程组

在用度规系数h_1,h_2,h_3表征的正交曲线坐标系里，§3.8里我们讨论过的麦克斯韦方程组〔式(3—172)～(3—175)〕可以分解成八个场量的标量偏微分方程组：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(h_3H_3)-\frac{\partial}{\partial u^3}(h_2H_2)\right]-\frac{\partial D_1}{\partial t}=J_1\\
&\frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u^3}(h_1H_1)-\frac{\partial}{\partial u^1}(h_3H_3)\right]-\frac{\partial D_2}{\partial t}=J_2\\
&\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(h_2H_2)-\frac{\partial}{\partial u^2}(h_1H_1)\right]-\frac{\partial D_3}{\partial t}=J_3
\end{aligned}\right\} \qquad (4—100)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(h_3E_3)-\frac{\partial}{\partial u^3}(h_2E_2)\right]+\frac{\partial B_1}{\partial t}=0\\
&\frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u^3}(h_1E_1)-\frac{\partial}{\partial u^1}(h_3E_3)\right]+\frac{\partial B_2}{\partial t}=0\\
&\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(h_2E_2)-\frac{\partial}{\partial u^2}(h_1E_1)\right]+\frac{\partial B_3}{\partial t}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (4—101)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^1}(h_2h_3D_1)+\frac{\partial}{\partial u^2}(h_3h_1D_2)+\frac{\partial}{\partial u^3}(h_1h_2D_3)=h_1h_2h_3\rho$$

$$(4—102)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^1}(h_2h_3B_1)+\frac{\partial}{\partial u^2}(h_3h_1B_2)+\frac{\partial}{\partial u^3}(h_1h_2B_3)=0 \qquad (4—103)$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{h_2 h_3}\boldsymbol{i}_1 & \dfrac{1}{h_3 h_1}\boldsymbol{i}_2 & \dfrac{1}{h_1 h_2}\boldsymbol{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3} \\ \dfrac{h_1}{h_2 h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u^2}(h_3 F_3) - \dfrac{\partial}{\partial u^3}(h_2 F_2)\right] & \dfrac{h_2}{h_1 h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u^3}(h_1 F_1) - \dfrac{\partial}{\partial u^1}(h_3 F_3)\right] & \dfrac{h_3}{h_1 h_2}\left[\dfrac{\partial}{\partial u^1}(h_2 F_2) - \dfrac{\partial}{\partial u^2}(h_1 F_1)\right] \end{vmatrix} \tag{4—99}$$

连续性方程〔式(3—180)〕在正交曲线坐标系里为

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i}J_i\right)+\frac{\partial p}{\partial t}=0 \qquad (4—104)$$

§4.5 各种正交曲线坐标系

在求解一个具体的物理问题(例如电磁场)时，首先是选择一个坐标系(或几个坐标系联合使用)，然后在选定的坐标系里应用变数分离法分解偏微分方程(例如波动方程)成三个常微分方程。

现在实际使用的正交坐标系有如下十三种：

(1)直角坐标系；(2)圆柱坐标系；(3)球面坐标系；(4)椭圆柱坐标系；(5)抛物线柱坐标系；(6)锥面坐标系；(7)椭球坐标系；(8)旋转长椭球坐标系；(9)旋转扁椭球坐标系；(10)旋转抛物面坐标系；(11)抛物面坐标系；(12)双球面坐标系；(13)环面坐标系。

在(1)～(11)的坐标系里，波动方程可以直接用变数分离法处理，而在(12)～(13)两种坐标系里，只有将拉普拉斯方程经过适当变换后才可以用变数分离法处理。直角坐标系在第三章已讨论过，现讨论其余的十二种坐标系。

一　圆柱坐标系

令 P' 是 $P_0(x,y,z)$ 点在 xy 平面上的投影，而 r,θ 是 P' 点在 xy 平面上的极坐标(图 4—5)，则变量：

$$u^1=r,\quad u^2=\theta,\quad u^3=z \qquad (4—105)$$

称为圆柱坐标系。它与直角坐标系之间的变换关系为

$$\left.\begin{aligned} &r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (0\leqslant r\leqslant\infty)\\ &\theta=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &z=z \end{aligned}\right\} \qquad (4—106)$$

除了在 z 轴上的 θ 没有定义外，变换对整个空间都成立。变换的雅可比行列式为

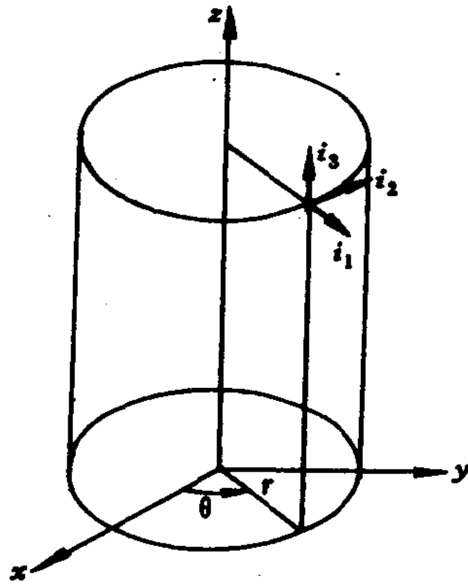


图 4—5

$$\frac{\partial(r,\theta,z)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & 0\\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{r} \tag{4—107}$$

逆变换为

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta\\ y &= r\sin\theta\\ z &= z\end{aligned}\right\} \tag{4—108}$$

逆变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\mathrm{sim}\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r \tag{4—109}$$

于是

$$\frac{\partial(r,\theta,z)}{\partial(x,y,z)}\cdot\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=1 \tag{4—110}$$

在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点相交的坐标面是：半径为 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，轴线为 z 的圆柱面；包含 z 轴并与 xz 平面成 $\theta_0=\arccos(x_0/r_0)=\arcsin(y_0/r_0)$ 的平面和 $z=z_0$ 的平面。坐标曲线是一个圆和两条直线，如图 4—5 所示。

在圆柱坐标系里，位置矢量为

$$R = (r, \theta, z) = r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad (4—111)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial r} = h_1\boldsymbol{i}_1 = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \theta} = h_2\boldsymbol{i}_2 = -r\sin\theta\boldsymbol{i} + r\cos\theta\boldsymbol{j} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial z} = h_3\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{k} \end{cases} \qquad (4—112)$$

单位矢量 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ 互相垂直，所以圆柱坐标系是一个正交坐标系。

由式(4—112)，度规系数为

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1 \qquad (4—113)$$

又由式(4—83)，线元的平方为

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + dz^2 \qquad (4—114)$$

设 $\varPsi$ 是一个数性函数，$\boldsymbol{F}$ 是一个矢函数，我们把式(4—113)代入式(4—92)、(4—93)、(4—94))和式(4—96)得

$$\left.\begin{aligned} \nabla\varPsi &= \frac{\partial\varPsi}{\partial r}\boldsymbol{i}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\varPsi}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial\varPsi}{\partial z}\boldsymbol{i}_3 \\ \nabla\cdot\boldsymbol{F} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial\theta} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ \nabla\times\boldsymbol{F} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_3}{\partial\theta} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial r}\right)\boldsymbol{i}_2 \\ &\quad + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_2) - \frac{1}{r}\frac{\partial F_1}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{i}_3 \\ \nabla^2\varPsi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varPsi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varPsi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varPsi}{\partial z^2} \end{aligned}\right\} (4—115)$$

例 1 试求算子 ∇ 在圆柱坐标系里的表示式并计算标量场 $f(r,\theta,z) = r^2z\sin\theta\cos\theta$ 的梯度。

解 把 $u^1 = r, u^2 = \theta, u^3 = z$ 和式(4—113)代入式(4—92)得

$$\nabla f = 2rz\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{i}_1 + rz(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\boldsymbol{i}_2 + r^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{i}_3$$

若将式(4—112)的 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ 代入上式并整理成含有 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的项，则

$$\nabla f = rz\sin\theta\boldsymbol{i} + rz\cos\boldsymbol{j} + r^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{k}$$

因为 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，上式可变为

$$\nabla f = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$$

这正好是函数 $f = xyz$ 的梯度，它是所给标量场在直角坐标里的表示式。本例表明了梯度的不变性。

例 2 试计算矢量场 $\boldsymbol{F}(r,\theta,z) = r^3\boldsymbol{i}_1 + r^2\sin\theta\boldsymbol{i}_2 + z^2\boldsymbol{i}_3$ 的散度。

解 由式(4—115)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot r^3) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r^2\sin\theta) + r\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]$$

$$= \frac{1}{r}(4r^3 + r^2\cos\theta + 2rz)$$

$$= 4r^2 + r\cos\theta + 2z$$

若根据式(4—108)变回直角坐标系，则

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 4(x^2 + y^2) + x + 2z$$

利用式(4—112)和式(4—108)将 $\boldsymbol{F}(r,\theta,z)$ 变换成用直角坐标系来表示，得

$$\boldsymbol{F} = r^3(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}) + r^2\sin\theta(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}) + z^2\boldsymbol{k}$$

$$= [x(x^2 + y^2) - y^2]\boldsymbol{i} + [y(x^2 + y^2) + xy]\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

它的散度是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 4(x^2 + y^2) + x + 2z$$

此例表明了散度的不变性。如果我们继续计算矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度，则同样可以表明旋度的不变性。

二 球面坐标系

变量

$$u^1 = r, \quad u^2 = \theta, \quad u^3 = \varphi \tag{4—116}$$

称为球面坐标系。它与直角坐标系的变换关系为

$$\left.\begin{aligned} & r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ & \theta = \arccos\frac{z}{r} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \\ & \varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi) \end{aligned}\right\} \tag{4—117}$$

雅可比行列式为

$$\frac{\partial(r,\theta,\varphi)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} & \dfrac{z}{r} \\ \dfrac{xz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{yz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} & -\dfrac{x^2+y^2}{r^2} \\ \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{r^2\sin\theta} \tag{4—118}$$

除了在 z 轴 $(\theta=0)$ 雅可比行列式没有定义外，变换对整个空间都成立。

逆变换为

$$\left.\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\varphi \\ y&=r\sin\theta\sin\varphi \\ z&=r\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{4—119}$$

逆变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta \tag{4—120}$$

在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点相交的坐标面是：中心在原点，半径为 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$ 的球面；顶点在原点，轴线为 z 轴，母线角为 $\theta_0=\arccos(z_0/r_0)$ 的“圆锥”面和包含 z 轴并与坐标平面 xz 成 $\varphi_0=\arccos(x_0/\sqrt{x_0^2+y_0^2})=\arcsin(y_0/\sqrt{x_0^2+y_0^2})$ 的平面(图 4—6)。

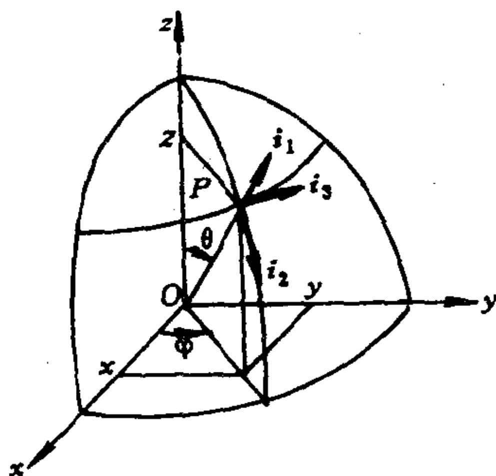


图 4—6

注意，这里所指的“圆锥”应该包括 $\theta=\pi/2$ 的 xy 平面和 $\theta>\pi/2$ 的圆锥。

在球面坐标系里，位置矢量为

$$\boldsymbol{R}=r\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+r\cos\theta\boldsymbol{k} \tag{1—121}$$

因此坐标曲线的切线矢量为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial r}&=h_1\boldsymbol{i}_1=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}\\
\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\theta}&=h_2\boldsymbol{i}_2=r\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+r\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}-r\sin\theta\boldsymbol{k}\\
\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\varphi}&=h_3\boldsymbol{i}_3=-r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{i}+r\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{j}
\end{aligned}\right\} \tag{1—122}$$

这些单位矢量也是相互正交的，所以球面坐标系也是正交曲线坐标系。

由式(4—122)，度规系数为

$$h_1=1,\quad h_2=r,\quad h_3=r\sin\theta \tag{4—123}$$

球面坐标系的线元为

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{4—124}$$

根据式(4—123)算出的梯度、散度、旋度和拉普拉斯算子为

$$\left.\begin{aligned}
\nabla\Psi&=\frac{\partial\Psi}{\partial r}\boldsymbol{i}_1+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_2+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\boldsymbol{i}_3\\
\nabla\cdot\boldsymbol{F}&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_1)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_2)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_3}{\partial\varphi}\\
\nabla\times\boldsymbol{F}&=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_3)-\frac{\partial F_2}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{i}_1+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_1}{\partial\varphi}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\partial}{\partial r}(rF_3)\right]\boldsymbol{i}_2+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_2)-\frac{\partial F_1}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{i}_3\\
\nabla^2\Psi&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}\right\} \tag{4—125}$$

例 3 已知矢量 $\boldsymbol{F}$ 在球面坐标系里的分量为

$$F_1=\frac{2k\cos\theta}{r^3},\quad F_2=\frac{k\sin\theta}{r^3},\quad F_3=0$$

其中 k 是常数。试判别 $\boldsymbol{F}$ 是否是势量场？若是势量场 $\boldsymbol{F}=\nabla\Psi$，试求 Ψ。

解 将 F_1,F_2,F_3 代入式(4—125)得

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$$

因此 F 是势量场，故 $F = \nabla \Psi$。

由式(3—13)

$$d\Psi = \nabla \Psi \cdot d\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{R}$$

又

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta$$

$$d\boldsymbol{R} = h_1 dr \boldsymbol{i}_1 + h_2 d\theta \boldsymbol{i}_2 + h_3 d\varphi \boldsymbol{i}_3$$

$$\boldsymbol{F} = F_1 \boldsymbol{i}_1 + F_2 \boldsymbol{i}_2 + F_3 \boldsymbol{i}_3$$

所以

$$d\Psi = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{R} = \frac{2k\cos\theta}{r^3} dr + \frac{k\sin\theta}{r^2} d\theta$$

$$= d\left(-\frac{k\cos\theta}{r^2}\right)$$

于是

$$\Psi = -\frac{k\cos\theta}{r^2}$$

三 椭圆柱坐标系

设椭圆的两个焦点为 P_1 和 P_2，其位置是 $x_1 = c_1$ 和 $x_2 = -c_1$，又设在 xy 平面上任一点与 P_1 和 P_2 的距离为 r_1 和 r_2（图 4—7），变量

$$u^1 = \xi, \quad u^2 = \eta, \quad u^3 = z \tag{4—126}$$

称为椭圆柱坐标系。它们定义为

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{r_1 + r_2}{2c_1} \\ \eta &= \frac{r_1 - r_2}{2c_1} \\ z &= z \end{aligned}\right\} \tag{4—127}$$

由图 4—7 上的 ΔP_1PP_2 看出，$P_1P_2 = 2c_1$，$PP_1 = r_1$，$P_2P = r_2$。由式(4—127)得

$$\xi \geqslant 1, \qquad -1 \leqslant \eta \leqslant 1 \tag{4—128}$$

ξ 等于常数的坐标面是一个椭圆柱，它的横截面是焦点为 P_1 和 P_2 的椭圆。椭圆的长半轴和短半轴为

$$a_1 = c_1 \xi, \qquad b = c_1\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$a^2 - b^2 = c_1^2 \tag{4—129}$$

偏心率为

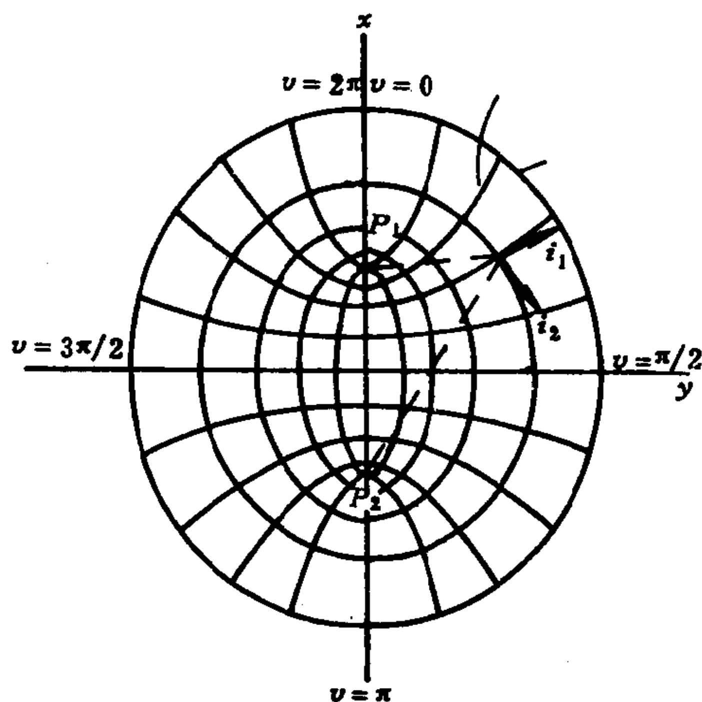


图 4—7

$$e=\frac{c_1}{a}=\frac{1}{\xi} \tag{4—130}$$

η 等于常数的坐标面代表如图所示的一族双叶共焦双曲线柱面。共焦系统的椭圆和双曲线方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{\xi^2}+\frac{y^2}{\xi^2-1}=c_1^2\\ \frac{x^2}{\eta^2}-\frac{y^2}{1-\eta^2}=c_1^2\end{aligned}\right\} \tag{4—131}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&x=c_1\xi\eta\\ &y=c_1\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\\ &z=z\end{aligned}\right\} \tag{4—132}$$

由式(4—132)、(4—82)得

$$h_1=c_1\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}},\quad h_2=c_1\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}},\quad h_3=1 \tag{4—133}$$

$$ds^2=c_1^2\left[\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}d\xi^2+\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}d\eta^2\right]+dz^2 \tag{4—134}$$

$$\nabla^2\Psi=\frac{1}{c_1^2(\xi^2-\eta^2)}\left[\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)\right.$$

$$\left.+\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)\right]+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\quad(4\text{—}135)$$

通过下列变换

$$\xi=\operatorname{ch}u,\qquad \eta=\cos v\qquad(4\text{—}136)$$

我们可以得另一种椭圆柱坐标系：

$$u^1=u,\qquad u^2=v,\qquad u^3=z\qquad(4\text{—}137)$$

在这种情况下

$$h_1=h_2=c_1\sqrt{\operatorname{ch}^2u-\cos^2v},\qquad h_3=1\qquad(4\text{—}138)$$

$$ds^2=c_1(\operatorname{ch}^2u-\cos^2v)(du^2+dv^2)+dz^2\qquad(4\text{—}139)$$

$$\nabla^2\Psi=\frac{1}{c_1^2(\operatorname{ch}^2u-\cos^2v)}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\quad(4\text{—}140)$$

变量 η 相当于从 x 轴算起的角度的余弦，单位矢量 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2$ 如图4—7所示，$\boldsymbol{i}_3$ 垂直于纸面并指向离开读者的方向。

四　抛物线柱坐标系

若 r,θ 是任一点在 xy 平面上的极坐标，则可用下列方程定义两族相互垂直的抛物线

$$\xi=\sqrt{2r}\sin\frac{\theta}{2},\qquad \eta=\sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2}\qquad(4\text{—}141)$$

ξ 等于常数和 η 等于常数的曲面是两族正交的抛物线柱面，它们的母线都平行于 z 轴(图 4—8)。

变量

$$u^1=\xi,\qquad u^2=\eta,\qquad u^3=-z\qquad(4\text{—}142)$$

称为抛物线柱坐标系。若用直角坐标系代替式(4—141)中的 r 和 θ，则

$$\left.\begin{aligned}\xi^2&=2r\sin^2\frac{\theta}{2}=r(1-\cos\theta)=\sqrt{x^2+y^2}-x\\ \eta^2&=2r\cos^2\frac{\theta}{2}=r(1+\cos\theta)=\sqrt{x^2+y^2}+x\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{—}143)$$

因此

$$x=\frac{1}{2}(\eta^2-\xi^2),\qquad y=\xi\eta,\qquad z=-z\qquad(4\text{—}144)$$

度规系数为

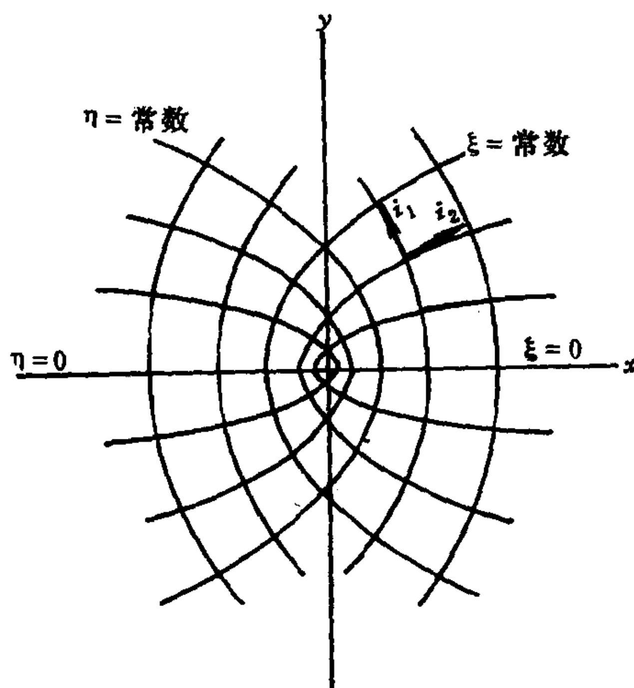


图 4—8

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \qquad h_3 = 1 \tag{4—145}$$

线元和拉普拉斯算子为

$$ds^2 = (\xi^2 + \eta^2)(d\xi^2 + d\eta^2) + dz^2 \tag{4—146}$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \tag{4—147}$$

通过变换

$$\xi^2 = \lambda, \qquad \eta^2 = \mu \tag{4—148}$$

我们可以得到另一种抛物线柱坐标系

$$u^1 = \lambda, \qquad u^2 = \mu, \qquad z = -z \tag{4—149}$$

这时

$$x = \frac{1}{2}(\mu - \lambda), \quad y = \sqrt{\lambda\mu}, \quad z = -z \tag{4—150}$$

$$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\mu}}, \quad h_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\lambda}}, \quad h_3 = 1 \tag{4—151}$$

$$ds^2 = \frac{\lambda + \mu}{4}\left(\frac{d\lambda^2}{\lambda} + \frac{d\mu^2}{\lambda}\right) + dz^2 \tag{4—152}$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{4}{\lambda + \mu}\left[\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sqrt{\lambda}\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}\right)\right.$$

$$+\sqrt{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right)\Bigg]+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \tag{4—153}$$

由式(4—150)消去 μ 或 λ 得

$$y^2+2\mu x-\mu^2=0, \quad y^2-2\lambda x-\lambda^2=0 \tag{4—154}$$

当 λ 从 0 变到∞，μ 从 0 变到∞时，式(4—154)代表两族互相正交的抛物线，它们的焦点都在原点上。

抛物线柱坐标系的单位矢量 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2$ 如图 4—8 所示，$\boldsymbol{i}_3$ 垂直于纸面并指向离开读者的方向。

五　锥面坐标系

设变量

$$u^1=r, \qquad u^2=\lambda, \qquad u^3=\mu \tag{4—155}$$

是锥面坐标系，其定义为

$$\left.\begin{aligned}
&r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} && (0\leqslant r\leqslant\infty)\\
&\frac{x^2}{\lambda-a^2}+\frac{y^2}{\lambda+b^2}+\frac{z^2}{\lambda}=0 && (0\leqslant\lambda\leqslant a^2)\\
&\frac{x^2}{\mu+a^2}+\frac{y^2}{\mu-b^2}+\frac{z^2}{\lambda}=0 && (0\leqslant\mu\leqslant b^2)\\
&a^2+b^2=1
\end{aligned}\right\} \tag{4—156}$$

r 等于常数的表面是球面，λ 等于常数和 μ 等于常数的表面都是椭圆锥面。由式(4—156)得

$$\left.\begin{aligned}
&x=\frac{r}{a}\sqrt{(a^2-\lambda)(a^2+\mu)}\\
&y=\frac{r}{b}\sqrt{(b^2+\lambda)(b^2-\mu)}\\
&z=\frac{r\sqrt{\lambda\mu}}{ab}, \qquad a^2+b^2=1
\end{aligned}\right\} \tag{4—157}$$

因此

$$\left.\begin{aligned}
&h_1=1, \qquad h_2=\frac{r}{2}\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}}\\
&\qquad\qquad\ \ h_3=\frac{r}{2}\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}}
\end{aligned}\right\} \tag{4—158}$$

$$ds^2=dr^2+\frac{r^2(\lambda+\mu)}{4}\left[\frac{d\lambda^2}{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}+\frac{d\mu^2}{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}\right] \tag{4—159}$$

$$\nabla^2\Psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{4}{r^2(\lambda+\mu)}$$
$$\times\left\{\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\right]\right.$$
$$\left.+\sqrt{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right]\right\} \tag{4—160}$$

通过变换

$$\lambda=\xi^2,\qquad \mu=\eta^2 \tag{4—161}$$

我们可以得到另一种锥面坐标系

$$u^1=r,\qquad u^2=\xi,\qquad u^3=\eta \tag{4—162}$$

这时

$$\left.\begin{aligned}h_1=1,\quad h_2&=r\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{(a^2-\xi^2)(b^2+\xi^2)}}\\ h_3&=r\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{(a^2+\eta^2)(b^2-\eta^2)}}\end{aligned}\right\} \tag{4—163}$$

$$\nabla^2\Psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2(\xi^2+\eta^2)}$$
$$\times\left\{\sqrt{(a^2-\xi^2)(b^2+\xi^2)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\sqrt{(a^2-\xi^2)(b^2+\xi^2)}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right]\right.$$
$$\left.+\sqrt{(a^2+\eta^2)(b^2-\eta^2)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\sqrt{(a^2+\eta^2)(b^2-\eta^2)}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right]\right\} \tag{4—164}$$

六 椭球坐标系

在直角坐标系里，椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4—165}$$

式中 a,b,c 为椭球体的半轴长。与式(4—165)共焦的二次曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=1 \tag{4—166}$$

假设 $a>b>c$（轴长间有相等的情况放在下面的旋转椭球坐标里讨论）。

现在我们来讨论当 θ 值从大变小时式(4—166)代表的二次曲面性质。

当 $\theta\gg a^2\gg b^2\gg c^2$ 时，式(4—166)变成

$$\frac{x^2}{\theta}+\frac{y^2}{\theta}+\frac{z^2}{\theta}=1 \qquad (4—167)$$

它代表中心在原点、半径为 $\sqrt{\theta}$ 的圆球面方程。

当 $\theta=0$ 时，式(4—166)变成式(4—165)的椭球面。

当 $\theta>-c^2$ 时，式(4—166)代表椭球面。

当 $\theta=-c^2, z=0$ 时，式(4—166)变成

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1 \qquad (4—168)$$

它代表位于 xy 平面上的一个椭圆。

当 $-b^2<\theta<-c^2$ 时，式(4—166)变成单叶双曲面。

当 $\theta=-b^2, y=0$ 时，式(4—166)变成

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1 \qquad (4—169)$$

它代表在 xz 平面上的双曲线。

当 $-a^2<\theta<b^2$ 时，式(4—166)代表双叶双曲面。

当 $0\leqslant-a^2$ 时，式(4—166)出现了虚数，不存在二次曲面。

综上所述，当 θ 值不同时，式(4—166)代表不同的曲面(线)族。为了进一步讨论 θ 值，令

$$\varphi(\theta)=(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta) \qquad (4—170)$$

用 $\varphi(\theta)$乘式(4—166)得

$$\varphi(\theta)\left[\frac{x^2}{(a^2+\theta)}+\frac{y^2}{(b^2+\theta)}+\frac{z^2}{(c^2+\theta)}\right]=\varphi(\theta)$$

于是

$$\begin{aligned} f(\theta)&=\varphi(\theta)\left[1-\frac{x^2}{(a^2+\theta)}-\frac{y^2}{(b^2+\theta)}-\frac{z^2}{(c^2+\theta)}\right]\\ &=(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)-x^2(b^2+\theta)(c^2+\theta)\\ &\quad-y^2(c^2+\theta)(a^2+\theta)-z^2(a^2+\theta)(b^2+\theta)=0 \end{aligned} \qquad (4—171)$$

由此可见，$f(\theta)$是 θ 的三次多项式，有三个根 ξ,η,ζ。即

$$f(\theta)=(\theta-\xi)(\theta-\eta)(\theta-\zeta) \qquad (4—172)$$

当 θ依次取为 $-\infty,-a^2,-b^2,-c^2,+\infty$ 时，$f(\theta)$ 依次为 $-\infty$，$-x^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)$，$y^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)$，$-x^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)$，$+\infty$。因此，$f(\theta)$ 的三个根分别分布在区域 $(-a^2,-b^2)$，$(-b^2,-c^2)$ 和 $(-c^2,+\infty)$ 中间，它们是互不相等的实根，将其按大小依次选择为 $\xi>\eta>\zeta$，即

$$\xi > -c^2 > \eta > -b^2 > \zeta > -a^2 \qquad (4—173)$$

令式(4—166)中的 θ 分别等于 ξ,η,ζ，则

$$\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{y^2}{b^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}=1 \quad (\xi > -c^2) \qquad (4—174)$$

$$\frac{x^2}{a^2+\eta}+\frac{y^2}{b^2+\eta}+\frac{z^2}{c^2+\eta}=1 \quad (-c^2 > \eta > -b^2) \qquad (4—175)$$

$$\frac{x^2}{a^2+\zeta}+\frac{y^2}{b^2+\zeta}+\frac{z^2}{c^2+\zeta}=1 \quad (-b^2 > \zeta > -a^2) \qquad (4—176)$$

式(4—174)～(4—176)分别代表椭球面、单叶双曲面和双叶双曲面。这三个曲面在空间的交点决定一组值：x^2,y^2,z^2，它们相应于在空间的八个点。与此相反，经过空间任一点 $P(x,y,z)$，对应着三个值(ξ,η,ζ)有三个曲面：式(4—174)、(4—175)、(4—176)。

变量：

$$u^1=\xi, \quad u^2=\eta, \quad u^3=\zeta \qquad (4—177)$$

称为椭球坐标系。联立求解式(4—174)～(4—176)得

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ y &= \pm\left[\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ z &= \pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (4—178)$$

将式(4—178)代入式(4—56)得 $g_{ij}=0(i\neq j)$，这表明空间任一点的三个曲面〔式(4—174)～(4—176)〕是互相正交的。

这时

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}{(\xi+a^2)(\xi+b^2)(\xi+c^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ h_2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}{(\eta+a^2)(\eta+b^2)(\eta+c^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ h_3 &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}{(\zeta+a^2)(\zeta+b^2)(\zeta+c^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (4—179)$$

$$ds^2=\frac{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}{4\varphi(\xi)}d\xi^2+\frac{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}{4\varphi(\eta)}d\eta^2 + \frac{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}{4\varphi(\zeta)}ds^2 \qquad (4—180)$$

式中 $\varphi(\theta)$的定义是式(4—173)，$\theta=\xi,\eta,\zeta$ 。

$$\nabla^2\Psi = \frac{4}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)}$$

$$\times\left\{(\eta-\zeta)\sqrt{\varphi(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\sqrt{\varphi(\xi)}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right]\right.$$

$$+(\xi-\zeta)\sqrt{-\varphi(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\sqrt{-\varphi(\eta)}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right]$$

$$\left.+(\xi-\eta)\sqrt{\varphi(\zeta)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\sqrt{\varphi(\zeta)}\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}\right]\right\} \qquad (4—181)$$

七　旋转长椭球坐标系

如果在式(4—166)中取 $b=c$，则得

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{r^2}{b^2+\theta}=1 \qquad (4—182)$$

式中

$$r^2=y^2+z^2$$

式(4—182)中的 θ 取不同值时代表不同的曲面。

当 $-b^2<\theta<\infty$ 时，令

$$a^2+\theta=(a^2-b^2)\xi^2=c_1^2\xi^2 \qquad (4—183)$$

式中

$$a^2-b^2=c_1^2$$

因此

$$b^2+\theta=c_1(\xi^2-1) \qquad (4—184)$$

将式(4—183)、(4—184)代入式(4—182)得

$$\frac{x^2}{c_1^2\xi^2}+\frac{r^2}{c_1^2(\xi^2-1)}=1 \qquad (4—185)$$

从式(4—184)看出，$\xi^2>1$，方程(4—185)代表椭球面。

当 $-a^2<\theta<-b^2$ 时，令

$$a^2+\theta=(a^2-b^2)\eta^2=c_1^2\eta^2 \qquad (4—186)$$

式中

$$c_1^2=a^2-b^2$$

因此

$$b^2+\theta=-c_1^2(1-\eta^2) \qquad (4—187)$$

将式(4—186)、(4—187)代入式(4—182)得

$$\frac{x^2}{c_1^2\eta^2}-\frac{r^2}{c_1^2(1-\eta^2)}=1 \qquad (4—188)$$

从式(4—187)看出，$-1<\eta<1$，方程(4—188)代表与式(4—185)共焦的双曲线方程。当 ξ 取不同值时，方程(4—185)代表一

族以 x 轴为旋转轴的旋转长椭球面，而方程（4—188）代表一族以 x 轴为旋转轴的双叶双曲面。

前已指出，椭球柱坐标系是一个共焦椭圆系统沿 z 轴平移而产生。旋转椭球坐标系则是椭圆绕一对称轴旋转得到。若旋转轴是椭圆的长轴，则称为旋转长椭球坐标系，它们的正交面是一族双叶双曲面，如将图 4—7 绕 x 轴旋转即可构成一个旋转长椭球坐标系。现在假设 φ 表示在 yz 平面上从 y 轴算起的角度，则

$$y = r\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi \tag{4—189}$$

由式(4—185)、(4—188)和式(4—189)定义的变量

$$u^1 = \xi, \quad u^2 = \eta, \quad u^3 = \varphi \tag{4—190}$$

称为旋转长椭球坐标系。由这些关系式可以导出

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1\xi\eta \\ y &= c_1\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi \\ z &= c_1\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{4—191}$$

ξ,η,φ 的变化范围是：

$$\xi \geqslant 1, \quad -1 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

在这种情况下

$$h_1 = c_1\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}}, \qquad h_2 = c_1\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}}$$

$$h_3 = c_1\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)} \tag{4—192}$$

$$ds^2 = c_1^2\left[\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}d\xi^2 + \frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}d\eta^2 + \sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}d\varphi^2\right] \tag{4—193}$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{c_1^2(\xi^2-\eta^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right] + \left(\frac{1}{\xi^2-1}+\frac{1}{1-\eta^2}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right\} \tag{4—194}$$

通过变换

$$\lambda = \xi^2, \qquad \mu = \eta^2 \tag{4—195}$$

我们可以得到另一种旋转长椭球坐标系：

$$u^1 = \lambda, \quad u^2 = \mu, \quad u^3 = \varphi \tag{4—196}$$

这时

$$ds^2 = \frac{c_1^2}{4}\left[\frac{\lambda-\mu}{\lambda(\lambda-1)}d\lambda^2 + \frac{\lambda-\mu}{\mu(1-\mu)}d\mu^2 + 4(\lambda-1)(1-\mu)d\varphi^2\right] \tag{4—197}$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{4}{c_1^2(\lambda-\mu)}\left\{\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda-1)\sqrt{\lambda}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\right]\right.$$

$$+\sqrt{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu)\sqrt{\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right]$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{1-\mu}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right\} \tag{4—198}$$

如果作变换：

$$\xi = \mathrm{ch}u, \qquad \eta = \cos v$$

则还可以得一种旋转长椭球坐标系

$$u^1 = u, \quad u^2 = v, \quad u^3 = \varphi \tag{4—199}$$

这时

$$h_1 = h_2 = c_1\sqrt{\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v}, \quad h_3 = \mathrm{sh}u\sin v \tag{4—200}$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{c_1^2(\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v)}\left\{\frac{1}{\mathrm{sh}u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{sh}u\frac{\partial\Psi}{\partial u}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{\sin v}\frac{\partial}{\delta v}\left(\sin v\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u}+\frac{1}{\sin^2 v}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right\} \tag{4—201}$$

八　旋转扁椭球坐标系

如将图 4—7 绕椭圆的短轴旋转时，旋转椭球是扁的。现在我们用 z 轴代替图 4—7 上的 y 轴，焦点 P_1P_2 在 xy 平面上描绘出一个圆。设 φ 是以 y 轴为始线的角度，则

$$y = r\cos\varphi, \quad x = r\sin\varphi, \quad r^2 = x^2 + y^2 \tag{4—202}$$

这时相当于在式(4—166)中取 $a = b$，即

$$\frac{r^2}{a^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=1 \tag{4—203}$$

令

$$\left.\begin{aligned} a^2+\theta &= (a^2-c^2)\xi^2 = c_1^2\xi^2 \\ c^2+\theta &= c_1^2(\xi^2-1) \end{aligned}\right\} \tag{4—204}$$

于是

$$\frac{r^2}{c_1^2\xi^2}+\frac{z^2}{c_1^2(\xi^2-1)}=1 \tag{4—205}$$

当 $-c^2<\theta<\infty$ 时，$c^2+\theta>0$，$\xi^2>1$，式(4—205)代表椭球面方程。又令

$$a^2+\theta = (a^2-c^2)\eta^2 = c_1^2\eta^2 \tag{4—206}$$

式(4—203)变成

$$\frac{r^2}{c_1^2\eta^2}-\frac{z^2}{c_1^2(1-\eta^2)}=1 \qquad (4\text{—}207)$$

当 $-a^2<\theta<-c^2$ 时，从式(4—206)看出，$\eta^2<1$，式(4—207)代表双曲面方程。变量:

$$u^1=\xi,\quad u^2=\eta,\quad u^3=\varphi \qquad (4\text{—}208)$$

称为旋转扁椭球坐标系。变换关系为

$$\begin{aligned}x&=c_1\xi\eta\sin\varphi\\ y&=c_1\xi\eta\cos\varphi\\ z&=c_1\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\end{aligned} \qquad (4\text{—}209)$$

ξ 等于常数的表面是旋转扁椭球面，η 等于常数的表面是单叶双曲面。ξ,η,φ 的变化范围是

$$\xi\geqslant1,\quad -1\leqslant\eta\leqslant1,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$$

这时

$$h_1=c_1\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}},\quad h_2=c_1\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}},\quad h_3=c_1\xi\eta \qquad (4\text{—}210)$$

$$ds^2=c_1^2\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}d\xi^2+\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}d\eta^2+\xi^2\eta^2d\varphi^2\right) \qquad (4\text{—}211)$$

$$\nabla^2\Psi=\frac{1}{c_1^2(\xi^2-\eta^2)}\left[\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{1}{\eta^2}-\frac{1}{\xi^2}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right]$$
$$(4\text{—}212)$$

如果作变换:

$$\xi^2=\lambda^2+1,\qquad \eta^2=1-\mu^2 \qquad (4\text{—}213)$$

则可以消去 $\nabla^2\Psi$ 中的根式。这时

$$\begin{aligned}h_1&=c_1\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^2+1}},\quad h_2=c_1\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}}\\ h_3&=\sqrt{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}\end{aligned} \qquad (4\text{—}214)$$

$$\nabla^2\Psi=\frac{1}{c_1^2(\lambda^2+\mu^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda^2+1)\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\right]\right.$$
$$+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right]$$
$$\left.+\left(\frac{1}{1-\mu^2}-\frac{1}{\lambda^2+1}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right\} \qquad (4\text{—}215)$$

如果作变换:

这时
$$\left.\begin{array}{ll}\xi = \mathrm{ch}u, & \eta = \cos v \\ \lambda = \mathrm{sh}u, & \mu = \sin v\end{array}\right\} \tag{4—216}$$
则又可以得到另一种旋转扁椭球坐标系
$$u^1 = u, \quad u^2 = v, \quad u^3 = \varphi \tag{4—217}$$
这时
$$h_1 = h_2 = c_1\sqrt{\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v}, \quad h_3 = \mathrm{ch}u\cos v \tag{4—218}$$
$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{c_1^2(\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v)}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{ch}u\frac{\partial\Psi}{\partial u}\right) + \frac{1}{\cos v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\cos v\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right) + \left(\frac{1}{\cos^2 v} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right] \tag{4—219}$$

旋转椭球坐标系在实际中有很多应用。当偏心率趋于1时，旋转长椭球变成棒形，而旋转扁椭球则变成圆盘形。当偏心率或焦距趋于零时，旋转椭球体变成圆球，坐标系随着 $\xi \to r$，$\eta \to \cos\theta$ 而变回球面坐标系。

九 旋转抛物面坐标系

若将图4—8的抛物线绕它们的对称轴旋转，则得以原点共焦的旋转抛物面坐标系。现在我们用 z 轴代替图4—8中的 x 轴，如图4—9所示。设 R 是观察点 P 到原点 O 的距离，r 是抛物面与通过 P 点的 z 平面交线圆的半径。根据旋转抛物面的性质，$R+z=a$，$R-z=b$（a,b 都是常数）。令
$$u^1 = \lambda = R + z, \quad u^2 = \mu = R - z, \quad u^3 = \varphi \tag{4—220}$$
组成旋转抛物面坐标系，则 $\lambda = Q$ 代表一族共焦的旋转抛物面，$\mu = b$ 代表一族与 λ 等于常数正交的旋转抛物面，φ 等于常数代表通过 z 轴的一族平面。显然
$$\left.\begin{array}{l} R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{array}\right\} \tag{4—221}$$

由式(4—220)得
$$\lambda\mu = (R+z)(R-z) = R^2 - z^2 = x^2 + y^2 = r^2$$
设 φ 是从 x 轴算起的角度，则
$$x = \sqrt{\lambda\mu}\cos\varphi, \quad y = \sqrt{\lambda\mu}\sin\varphi$$
$$z = \frac{1}{2}(\lambda - \mu) \tag{4—222}$$

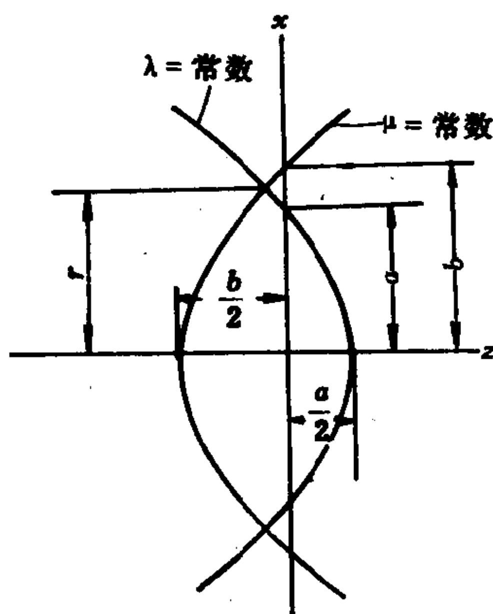


图 4—9

这时

$$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\lambda}}, \quad h_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\mu}}$$

$$h_3 = \sqrt{\lambda\mu} \tag{4—223}$$

$$ds^2 = \frac{\lambda+\mu}{4}\left(\frac{d\lambda^2}{\lambda} + \frac{d\mu^2}{\mu}\right) + \lambda\mu d\varphi^2 \tag{4—224}$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{4}{\lambda+\mu}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right] \tag{4—225}$$

如果作变换

$$\lambda = \xi^2, \qquad \mu = \eta^2 \tag{4—226}$$

则得另一种旋转抛物面坐标系

$$u^1 = \xi, \quad u^2 = \eta, \quad u^3 = \varphi \tag{4—227}$$

这时

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad h_3 = \xi\eta \tag{4—228}$$

$$ds^2 = (\xi^2 + \eta^2)(d\xi^2 + d\eta^2) + \xi^2\eta^2 d\varphi^2 \tag{4—229}$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}\left[\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\Bigg] \tag{4—230}$$

十 抛物面坐标系

在直角坐标系里，抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}=2z+\theta \tag{4—231}$$

通过 $P\ (x,y,z)$ 点有三个曲面，它们对应于三个 θ 值：λ,μ,ν，它们满足条件：

$$\lambda>-b^2>\mu>-a^2>\nu \tag{4—232}$$

令

$$\varphi(\theta)=(a^2+\theta)(b^2+\theta)$$

用 $\varphi(\theta)$乘式(4—231)得

$$\begin{aligned} f(\theta)=&(a^2+\theta)(b^2+\theta)(2z+\theta)\\ &-(b^2+\theta)x^2-(a^2+\theta)y^2=0 \end{aligned} \tag{4—233}$$

从式(4—233)看出，$f(\theta)$是 θ 的三次多项式，有三个根 λ,μ,ν，即

$$\begin{aligned} f(\theta)=&(a^2+\theta)(b^2+\theta)(2z+\theta)\\ &-(b^2+\theta)x^2-(a^2+\theta)y^2\\ =&(\theta-\lambda)(\theta-\mu)(\theta-\nu) \end{aligned} \tag{4—234}$$

依次令 $\theta=-a^2,-b^2,0$，得

$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{a^2-b^2}\\ y^2&=\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{a^2-b^2}\\ 2z&=-\lambda-\mu-\nu-a^2-b^2 \end{aligned}\right\} \tag{4—235}$$

变量：

$$u^1=\lambda,\quad u^2=\mu,\quad u^3=\nu \tag{4—236}$$

称为抛物面坐标系。λ 取一定值的抛物面，它的 xy 截面是椭圆，称为椭圆抛物面，主轴为 z 轴，顶点在 $z=-\frac{1}{2}\lambda$ 处。μ 取一定值的抛物面，它的 xy 截面是双曲线，称为双曲抛物面，其形状呈马鞍形，故又名马鞍面，而在 $z=\frac{1}{2}\mu$ 处的截面是两条相交的直线。ν 取一定值的抛物面也是椭圆抛物面，主轴为负 z 轴取向，顶点在 $z=-\frac{1}{2}\nu$ 处。

$$h_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}},\quad h_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)}}$$

$$h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(a^2+\nu)(b^2+\nu)}} \tag{4—237}$$

$$ds^2 = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}d\lambda^2 + \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{4(a^2+\mu)(b^2+\mu)}d\mu^2$$
$$+ \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4(a^2+\nu)(b^2+\nu)}d\nu^2 \tag{4—238}$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}$$
$$\times\left\{(\mu-\nu)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\right]\right.$$
$$+(\lambda-\nu)\sqrt{-(a^2+\mu)(b^2+\mu)}$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{-(a^2+\mu)(b^2+\mu)}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right]$$
$$+(\lambda-\mu)\sqrt{(a^2+\nu)(b^2+\nu)}$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\sqrt{(a^2+\nu)(b^2+\nu)}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right]\right\} \tag{4—239}$$

如果作变换

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= \frac{a^2-b^2}{2}\mathrm{ch}u - \frac{a^2+b^2}{2},\\ \mu &= \frac{a^2-b^2}{2}\cos v - \frac{a^2+b^2}{2},\\ \nu &= -\frac{a^2-b^2}{2}\mathrm{ch}w - \frac{a^2+b^2}{2}\end{aligned}\right\} \tag{4—240}$$

则得另一种抛物面坐标系

$$u^1 = u,\quad u^2 = v,\quad u^3 = w \tag{4—241}$$

这时

$$\left.\begin{aligned}x &= (a^2-b^2)\mathrm{ch}\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}\mathrm{sh}\frac{w}{2}\\ y &= (a^2-b^2)\mathrm{sh}\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\mathrm{ch}\frac{w}{2}\\ z &= -\frac{a^2-b^2}{2}\left[\left(\mathrm{ch}\frac{u}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{v}{2}\right)^2-\left(\mathrm{ch}\frac{w}{2}\right)^2\right]+\frac{a^2}{2}\end{aligned}\right\} \tag{4—242}$$

$$ds^2 = \left(\frac{a^2-b^2}{4}\right)^2[(\mathrm{ch}u-\cos v)(\mathrm{ch}u+\mathrm{ch}w)du^2$$
$$+(\mathrm{ch}u-\cos v)(\cos v+\mathrm{ch}w)dv^2$$

$$+ (\text{ch}u + \text{ch}w)(\cos v + \text{ch}w)dw^2] \tag{4—243}$$

$$\nabla^2\Psi = \left(\frac{4}{a^2 - b^2}\right)^2 \frac{1}{(\text{ch}u - \cos v)(\text{ch}u + \text{ch}w)(\cos v + \text{ch}w)}$$

$$+ \left[(\cos v + \text{ch}w)\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} + (\text{ch}u + \text{ch}w)\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}\right.$$

$$\left. + (\text{ch}u - \cos v)\frac{\partial^2\Psi}{\partial w^2}\right] \tag{4—244}$$

十一 双球面坐标系

设 P_1, P_2 是在 z 轴上的两个固定点，它们的坐标是(0，0，a)，(0，0，$-a$)。若 λ 是一个参数，则

$$x^2 + (z - \lambda)^2 = \lambda^2 - a^2 \tag{4—245}$$

代表中心在 z 轴上的两族对称于 x 轴的圆方程(图 4—10)。P_1 点相应于 $\lambda = a$，P_2 点相应于 $\lambda = -a$。

与式(4—245)的两族圆正交并通过 P_1P_2 两固定点、中心位于 x 轴上的圆方程为

$$(x - \mu)^2 + z^2 = \mu^2 + a^2 \tag{4—246}$$

式中 μ 是另一个参数。

我们将图 4—10 的正交圆绕 z 轴旋转，则变量

$$u^1 = \lambda, \quad u^2 = \mu, \quad u^3 = \varphi \tag{4—247}$$

表示双球坐标系，它们与直角坐标系的关系为

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi \tag{4—248}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho^2 + (z - \lambda)^2 &= \lambda^2 - a^2 \\ (\rho - \mu)^2 + z^2 &= \mu^2 + a^2 \end{aligned}\right\} \tag{4—249}$$

λ 的变化范围是(a, ∞)和$(-\infty, -a)$，μ 的变化范围是$(-\infty, \infty)$，φ 的变化范围是$(0, 2\pi)$。

当 $\lambda > a$ 时，由式(4—249)消去 z 或 ρ 得

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{a^2\sqrt{\lambda^2 - a^2}}{\lambda\sqrt{\mu^2 + a^2} - \mu\sqrt{\lambda^2 - a^2}} \\ z &= \frac{a^2\sqrt{\mu^2 + a^2}}{\lambda\sqrt{\mu^2 + a^2} - \mu\sqrt{\lambda^2 - a^2}} \end{aligned}\right\} \tag{4—250}$$

当 $\lambda < -a$ 时，式(4—250)中的 λ 应改为 $-\lambda$，z 应改为 $-z$。

$$h_1 = \frac{z}{\sqrt{\lambda^2 - a^2}}, \qquad h_2 = \frac{\rho}{\sqrt{\mu^2 + a^2}}$$

$$h_3 = \rho \tag{4—251}$$

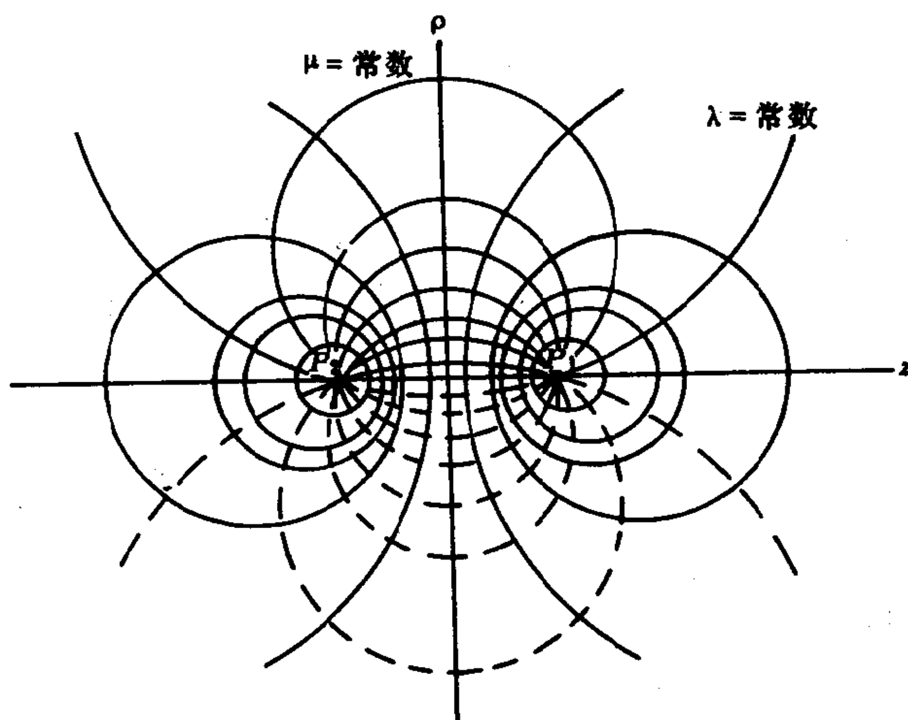


图 4—10

如果作变换

$$\lambda=\frac{a\xi}{\sqrt{\xi^2-1}},\qquad \mu=\frac{a\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \tag{4—252}$$

ξ 的变化范围是$(1,\infty)$，η 的变化范围是$(-1,1)$则

$$u^1=\xi,\quad u^2=\eta,\quad u^3=\varphi \tag{4—253}$$

是另一种双球面坐标系。把式(4—252)代入式(4—250)得

$$\rho=\frac{a\sqrt{1-\eta^2}}{\xi-\eta},\quad z=\frac{a\sqrt{\xi^2-1}}{\xi-\eta} \tag{4—254}$$

对于 $\lambda<0$，$\sqrt{\xi^2-1}$ 取负值。

$$h_1=\frac{a}{(\xi-\eta)\sqrt{\xi^2-1}},\qquad h_2=\frac{a}{(\xi-\eta)\sqrt{1-\eta^2}}$$

$$h_3=\frac{a\sqrt{1-\eta^2}}{\xi-\eta} \tag{4—255}$$

$$\nabla^2\Psi=\frac{(\xi-\eta)^3}{a^2}\left[\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi-\eta}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi-\eta}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{(1-\eta^2)(\xi-\eta)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right] \tag{4—256}$$

令

$$\xi = \mathrm{ch}u, \qquad \eta = \cos v$$

还可以得到另一种双球面坐标系

$$u^1 = \mathrm{ch}u, \quad u^2 = v, \quad u^3 = \varphi \tag{4—257}$$

u 的变化范围是$(-\infty,\infty)$，v 的变化范围是$(0,\pi)$。它们与 λ,μ 的关系为

$$\lambda = \frac{a\mathrm{ch}u}{\mathrm{sh}u}, \qquad \mu = a\mathrm{ctg}v \tag{4—258}$$

$$\rho = \frac{a\sin v}{\mathrm{ch}u - \cos v}, \qquad z = \frac{a\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u - \cos v} \tag{4—259}$$

$$ds^2 = \frac{a^2}{(\mathrm{ch}u - \cos v)^2}(du^2 + dv^2 + \sin^2 v d\varphi^2) \tag{4—260}$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{(\mathrm{ch}u - \cos v)^2}{a^2}\left[(\mathrm{ch}u - \cos v)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}u - \cos v}\frac{\partial\Psi}{\partial u}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\mathrm{ch}u - \cos v}{\sin v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sin v}{\mathrm{ch}u - \cos v}\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right) + \frac{1}{\sin^2 v}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right] \tag{4—261}$$

十二　环面坐标系

如果把双球面坐标系中的 ρ 和 z 互换，则得环面坐标系

$$u^1 = \lambda, \quad u^2 = \mu, \quad u^3 = \varphi \tag{4—262}$$

这时

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi \tag{4—263}$$

$$(\rho - \lambda)^2 + z^2 = \lambda^2 - a^2, \ \rho^2 + (z - \mu)^2 = \mu^2 + a^2 \tag{4—264}$$

λ 的变化范围是(a,∞)，μ 的变化范围是$(-\infty,\infty)$。

对于 $z > 0$，由式(4—264)解出

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{a^2\sqrt{\mu^2 + a^2}}{\lambda\sqrt{\mu^2 + a^2} - \mu\sqrt{\lambda^2 - a^2}} \\ z &= \frac{a^2\sqrt{\lambda^2 - a^2}}{\lambda\sqrt{\mu^2 + a^2} - \mu\sqrt{\lambda^2 - a^2}} \end{aligned}\right\} \tag{4—265}$$

对于 $z < 0$，应把式(4—265)中的 $\sqrt{\lambda^2 - a^2}$ 改为 $-\sqrt{\lambda^2 - a^2}$。

$$h_1 = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda^2 - a^2}}, \quad h_2 = \frac{z}{\sqrt{\mu^2 + a^2}}, \quad h_3 = \rho \tag{4—266}$$

如果作变换

$$\lambda = \frac{a\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad \mu = \frac{a\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \tag{4—267}$$

则得另一种环面坐标系 ξ, η, φ。ξ 的范围是 $(1, \infty)$，η 的变化范围是 $(-1, 1)$。代入式(4—265)得

$$\rho = \frac{a\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi - \eta}, \qquad z = \frac{a\sqrt{1 - \eta^2}}{\xi - \eta} \tag{4—268}$$

对于 $z < 0$，式(4—268)中的 η 和 $\sqrt{1-\eta^2}$ 应分别用 $-\eta$ 和 $-\sqrt{1-\eta^2}$ 代替。然而，由于 η 的变化范围有负值，所以当 $z < 0$ 时，只要把 $\sqrt{1-\eta^2}$ 改为 $-\sqrt{1-\eta^2}$ 即可。

$$h_1 = \frac{a}{(\xi - \eta)\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad h_2 = \frac{a}{(\xi - \eta)\sqrt{1 - \eta^2}}$$

$$h_3 = \frac{a\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi - \eta} \tag{4—269}$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{(\xi - \eta)^3}{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi - \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right) + \sqrt{1 - \eta^2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\xi - \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{(\xi^2 - 1)(\xi - \eta)}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}\right] \tag{4—270}$$

如果作变换

$$\xi = \mathrm{ch}u, \quad \eta = \cos v \tag{4—271}$$

还可以得到另一种环面坐标系 u, v, φ。u 的变化范围是 $(0, \infty)$，v 的变化范围是 $(-\pi, \pi)$ 或 $(0, 2\pi)$，它们与 λ、μ 的关系为

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{a\,\mathrm{ch}u}{\mathrm{sh}u}, \quad \mu = a\,\mathrm{ctg}v \\ \rho &= \frac{a\,\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u - \cos v}, \quad z = \frac{a\sin v}{\mathrm{ch}u - \cos v} \end{aligned}\right\} \tag{4—272}$$

这时

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{\mathrm{ch}u - \cos v}, \quad h_3 = \frac{a\,\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u - \cos v} \tag{4—273}$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{(\mathrm{ch}u - \cos v)^2}{a^2}\left[\frac{\mathrm{ch}u - \cos v}{\mathrm{sh}u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u - \cos v}\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right) + (\mathrm{ch}u - \cos v)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}u - \cos v}\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right) + \frac{1}{\mathrm{sh}^2 u}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}\right] \tag{4—274}$$

第五章　张量分析

自然界的运动法则以及新出现的几何或物理量是与坐标系无关的。但在处理具体问题时，总得引进一个较为方便的坐标系。这样一来，由于被研究的对象要加上一个偶然选择的坐标系。因而所得到的解析资料不仅反映出那些我们想要知道的东西，而且也反映出那些我们不想要的东西，这在理论研究中有时会引起不必要的复杂化。

张量方法就是既采用坐标系而又摆脱具体坐标系影响的不变性方法。它使研究对象确实重要的部分与由坐标的选择而偶然导来的部分相分开。从而使物理概念更为明确。

在这章里，我们主要讨论张量的代数运算和绝对微分法。这些都是张量计算的普遍理论基础。也是在研究微分几何、相对论的必要工具。

§5.1　仿射坐标系与坐标系的变换

在 n 维仿射空间中，设有任意一点 O 及任意 n 个线性独立矢量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$；它们全体便构成一个仿射坐标系 $\mathfrak{R}(0,e_1,\cdots,e_n)$。点 O 为坐标系的原点，$e_1,\cdots,e_n$ 为坐标系的基矢量。于是，仿射空间中任一矢量 x，都可按基矢量展开。我们有

$$x=x^1e_1+x^2e_2+\cdots+x^ne_n \tag{5—1}$$

式中的系数 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 叫做矢量 x 对已知坐标系的仿射坐标。

必须指出，展开式（5—1）是唯一的。因为，如果 x 有另一展式

$$x=\tilde{x}^1e_1+\tilde{x}^2e_2+\cdots+\tilde{x}^ne_n$$

那么

$$(x^1-\tilde{x}^1)e_1+(x^2-\tilde{x}^2)e_2+\cdots+(x^n-\tilde{x}^n)e_n=0$$

但 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是线性独立的，所以

$$x^i = \bar{x}^i \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

反之，由式(5—1)知；矢量 $\boldsymbol{x}$ 由它的坐标唯一决定。所以，对于一个已给定的仿射坐标系，矢量 $\boldsymbol{x}$ 及其坐标间的对应是一对一的。

设 M 是仿射空间的任一点。则与这个点一一对应的有一个矢量 $\boldsymbol{OM}$。它叫已知点的矢径，并记作 $\boldsymbol{r}$。它在给定的仿射坐标系中具有确定的坐标 $x^1, x^2, \cdots, x^n$。于是它的展开式为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n$$

我们把 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 叫做点 M 关于这个坐标系的仿射坐标。显然，点与它的坐标也是一一对应的。

设 $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \cdots, \boldsymbol{e}_{n'}$ 是另一个新仿射坐标系的基矢量。由式(5—1)，每一个这样的基矢量都可按旧坐标系的基矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 展开，于是有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{1'} &= a^1_{1'}\boldsymbol{e}_1 + a^2_{1'}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a^n_{1'}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}_{2'} &= a^1_{2'}\boldsymbol{e}_1 + a^2_{2'}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a^n_{2'}\boldsymbol{e}_n \\ &\cdots \\ \boldsymbol{e}_{n'} &= a^1_{n'}\boldsymbol{e}_1 + a^2_{n'}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a^n_{n'}\boldsymbol{e}_n \end{aligned}\right\} \qquad (5—2)$$

或把这些公式写成普遍式，则有

$$\boldsymbol{e}_{i'} = a^1_{i'}\boldsymbol{e}_1 + a^2_{i'}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a^n_{i'}\boldsymbol{e}_n \qquad (5—3)$$

这里的 i' 是从 1 变到 n。

式(5—3)也可写成

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \sum_{i=1}^{n} a^i_{i'}\boldsymbol{e}_i \qquad (5—4)$$

今后，还可省去求和符号，简写成

$$\boldsymbol{e}_{i'} = a^i_{i'}\boldsymbol{e}_i \qquad (5—5)$$

亦即，如果每个指标在乘积中出现一次，就表示它取一切可能的值 $(1,\ 2,\ \cdots,\ n)$；如果每个指标在乘积中作为上和下标各出现一次，就表示取一切可能的值$(1,\ 2,\cdots,n)$，然后再把各项相加，求总和。这种规定有时称为爱因斯坦(Einstein)约定。

由于新坐标系的基矢量 $\boldsymbol{e}_{i'}$ 是线性独立的，故相应于变换式(5—2)的矩阵

$$(\alpha_{i'}^{i}) = \begin{pmatrix} \alpha_{1'}^{1}\ \alpha_{1'}^{2} \cdots \alpha_{1'}^{n} \\ \alpha_{2'}^{1}\ \alpha_{2'}^{2} \cdots \alpha_{2'}^{n} \\ \cdots \\ \alpha_{n'}^{1}\ \alpha_{n'}^{2} \cdots \alpha_{n'}^{n} \end{pmatrix} \tag{5—6}$$

是非奇异的。设式(5—6)的逆阵为

$$(\alpha_{i}^{i'}) = \begin{pmatrix} \alpha_{1}^{1'}\ \alpha_{1}^{2'} \cdots \alpha_{1}^{n'} \\ \alpha_{2}^{1'}\ \alpha_{2}^{2'} \cdots \alpha_{2}^{n'} \\ \cdots \\ \alpha_{n}^{1'}\ \alpha_{n}^{2'} \cdots \alpha_{n}^{n'} \end{pmatrix} \tag{5—7}$$

于是，用新坐标系的基矢量 $\boldsymbol{e}_{i'}$ 来表示旧坐标系的基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 时，就有类似于式(5—5)的简写形式

$$\boldsymbol{e}_i = \alpha_i^{i'}\boldsymbol{e}_{i'} \tag{5—8}$$

由于矩阵(5—6)与(5—7)是互逆的，故有

$$\alpha_k^{j'}\alpha_{i'}^{k} = \delta_{i'}^{j'} \qquad \alpha_{k'}^{j}\alpha_i^{k'} = \delta_i^j \tag{5—9}$$

其中

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

称为克罗内克尔(Kronecker)符号。

设矢量 $\boldsymbol{x}$ 在旧坐标系下的表达式为(5—1)，在新坐标系下的表达式为

$$\boldsymbol{x} = x^{i'}\boldsymbol{e}_{i'} \tag{5—10}$$

其中 $x^{i'}$ 是矢量 $\boldsymbol{x}$ 在新坐标系中的坐标。为了求出 $\boldsymbol{x}$ 的新坐标与旧坐标的变换关系，把式(5—8)中的 $\boldsymbol{e}_i$ 代入式(5—1)。则有

$$\boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{e}_i = x^i\alpha_i^{i'}\boldsymbol{e}_{i'} \tag{5—11}$$

比较式(5—10)及(5—11)，由于 $\boldsymbol{x}$ 关于坐标系的基矢量的展开式是唯一的，故 $\boldsymbol{e}_{i'}$ 的系数应相等。我们有

$$x^{i'} = \alpha_i^{i'}x^i \tag{5—12}$$

同理，借助于逆变换，旧坐标可用新坐标表示为

$$x^i = \alpha_{i'}^{i}x^{i'} \tag{5—13}$$

比较公式(5—5)及(5—12)，我们看到：变换(5—12)的矩阵正是变换(5—5)的矩阵的转置逆矩阵。亦即，当旧坐标系变到新坐标系时，基矢量的变换公式及不变矢量的坐标变换公式是

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \alpha_{i'}^{i}\boldsymbol{e}_i \tag{5—14}$$

$$x^{i'} = \alpha_i^{i'}x^i \tag{5—15}$$

它是张量计算的基本公式。

现在再来考察点坐标的变换。若仅仅改变基矢量，而原点 O 保持不变，则每一点 M 的坐标正如它的矢径 $\overrightarrow{OM}$ 坐标一样地改变，即按公式(5—15)而改变。但是，如果使原点 O 也沿着一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 移动时，那么一切点 M 的矢径由此增加一个矢量 $-\boldsymbol{a}$，于是一切点 M 的坐标增加一个数 $\alpha^{i'}$，而 $\alpha^{i'}$ 是矢量 $-\boldsymbol{a}$ 的坐标。这样一来，一个不动点 M 的坐标 x^i 在此变换下的公式便具有如下的形式

$$x^{i'} = \alpha_i^{i'} x^i + \alpha^{i'} \tag{5—16}$$

§5.2 协变张量的概念

设在仿射空间中每一个矢量 $\boldsymbol{x}$ 对应于一个数 φ：

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}) \tag{5—17}$$

而对仿射空间中任意两个矢量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 有

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \varphi(\boldsymbol{x}_1) + \varphi(\boldsymbol{x}_2) \tag{5—18}$$

且对任意一个数 λ 有

$$\varphi(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{5—19}$$

这样的 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 叫做矢量 $\boldsymbol{x}$ 的线性函数。

设 $\boldsymbol{x}$ 在旧仿射坐标系中的展开为

$$\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i$$

由性质(5—18)及(5—19)得到

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(x^i \boldsymbol{e}_i) = x^i \varphi(\boldsymbol{e}_i)$$

为了方便，我们记

$$\varphi_i = \varphi(\boldsymbol{e}_i) \tag{5—20}$$

于是得到

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi_i x^i \tag{5—21}$$

上式表明：矢量的线性函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 可以用矢量的坐标表示为线性的形式。

在另一新的坐标系中，函数关系式(5—21)有如下形式

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi_{i'} x^{i'} \tag{5—22}$$

其中

$$\varphi_{i'} = \varphi(\boldsymbol{e}_{i'}) \tag{5—23}$$

利用式(5—5)及性质(5—18)、(5—19)可把式(5—23)改写为

$$\varphi_{i'} = \varphi(\alpha_{i'}^i \boldsymbol{e}_i) = \alpha_{i'}^i \varphi(\boldsymbol{e}_i)$$

再由式(5—20)我们得到

$$\varphi_{i'} = \alpha_{i'}^{i}\varphi_{i} \tag{5—24}$$

比较式(5—5)与(5—24)可知，系数 φ_i 的变换规律与坐标系的基矢量 e_i 的变换规律完全一致。

下面我们给出一阶协变张量的概念：

设在每一坐标系中，给定用一个指标(取值 $1, 2, \cdots, n$)而编号的 n 个数 T_i，并且在坐标变换时这些数的变换规律是

$$\mathrm{T}_{i'} = \alpha_{i'}^{i}\mathrm{T}_{i} \tag{5—25}$$

则称所给的是一个一阶协变张量。

T_i 叫做张量在对应坐标系中的坐标。

"协变"是指 T_i 的变换规律与基矢量 e_i 的变换规律是一致的。因此矢量线性函数的系数 φ_i 就是一个一阶协变张量的例子。反之，不难证实：任一个一阶协变张量 T_i 总可以按 $\varphi(x) = \mathrm{T}_i x^i$ 来定义 $\varphi(x)$。

又如，在任一仿射坐标系中，不过原点的超平面方程为

$$a_i x^i = 1 \tag{5—26}$$

在原点固定的各种仿射坐标系中，当坐标系改变时，任一点 M 的矢径 $\boldsymbol{OM}$ 不改变。因而点 M 的坐标 x^i 正如不变矢量的坐标一样，按式(5—13)而改变，即

$$x^i = \alpha_{i'}^{i} x^{i'}$$

将它代入式(5—26)得

$$a_i \alpha_{i'}^{i} x^{i'} = 1$$

于是我们得到上述超平面在新坐标系中的方程

$$a_{i'} x^{i'} = 1$$

其中

$$a_{i'} = \alpha_{i'}^{i} a_i$$

它与变换规律(5—25)相同。因而超平面方程的系数 a_i，在原点固定的一切仿射坐标系中，是一个一阶协变张量。

现考察两个矢量的双线性标量函数：

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{5—27}$$

即每一对有序矢量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 与一个数相对应，且 $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 关于每一个自变量是线性的。因此，由定义知 $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 不依赖于坐标的选择。

现设 $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{y} = y_j \boldsymbol{e}_j$。由 $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的性质得

$$\varphi(x, y) = \varphi(x^i e_i, y^j e_j) = x^i y^j \varphi(e_i, e_j) \tag{5—28}$$

为了方便，记

$$\varphi_{ij} = \varphi(e_i, e_j) \tag{5—29}$$

最后有

$$\varphi(x, y) = \varphi_{ij} x^i y^j \tag{5—30}$$

这样一来，φ_{ij} 必依赖于坐标系的选择。若在新坐标系中记

$$\varphi_{i'j'} = \varphi(e_{i'}, e_{j'})$$

由式(5—5)，我们有

$$\varphi_{i'j'} = \varphi(\alpha^i_{i'} e_i, \alpha^j_{j'} e_j) = \alpha^i_{i'} \alpha^j_{j'} \varphi(e_i, e_j)$$

从而得到系数 φ_{ij} 的变换规律

$$\varphi_{i'j'} = \alpha^i_{i'} \alpha^j_{j'} \varphi_{ij} \tag{5—31}$$

现在我们给出二阶协变张量的定义：

设在每一坐标系中，给出两个指标编号的 n^2 个数 T_{ij}，(i，j 分别取 1，2，…，n 值)。且在坐标变换下它们是按规律

$$\mathrm{T}_{i'j'} = \alpha^i_{i'} \alpha^j_{j'} \mathrm{T}_{ij} \tag{5—32}$$

改变的，则称所给出的是一个二阶协变张量。

T_{ij} 叫做这个张量在对应坐标系中的坐标。而双线性形式（5—30）中的系数 φ_{ij} 便是一个二阶协变张量的例子。反之，任意一个二阶协变张量，它的坐标 T_{ij} 总可看作某一个双线性函数的系数 φ_{ij}。

现给出协变张量的一般定义：

设在每一坐标系中，给出 k 个指标编号的 n^k 个数 $\mathrm{T}_{i_1 i_2 \cdots i_k}$，并且在坐标变换下它们是按下列规律

$$\mathrm{T}_{i'_1 i'_2 \cdots i'_k} = \alpha^{i_1}_{i'_1} \alpha^{i_2}_{i'_2} \cdots \alpha^{i_k}_{i'_k} \mathrm{T}_{i_1 i_2 \cdots i_k} \tag{5—33}$$

改变，则称所给的是一 k 阶协变张量。

$i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是 k 个不同的指标，它们各自独立地取遍 1，2，…，n 诸值。

$\mathrm{T}_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ 叫做张量在对应坐标系中的坐标。完全类似于双线性函数，对含有自变矢量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的多线性标量函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_k)$ 可以写作

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \varphi_{i_1 i_2 \cdots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_k^{i_k}$$

其中 $x_j^{i_j}$ 是 x_j 的坐标。$\varphi_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ 由下式决定

$$\varphi_{i_1 i_2 \cdots i_k} = \varphi(e_1, e_2, \cdots, e_k)$$

并按式(5—33)变换。它构成一个 k 阶协变张量。

§5.3 张量的一般概念

在§5.1中曾指出：对固定的矢量 $\boldsymbol{x}$，它的坐标是按规律式(5—12)而改变的，即

$$x^{i'} = \alpha_i^{i'} x^i \tag{5—34}$$

在一般的情况下，设在每一坐标系中，给出以一个指标编号的 n 个数 $T^1, T^2, \cdots, T^n$，并且在坐标变换时，它们是按下列规律

$$T^{i'} = \alpha_i^{i'} T^i \tag{5—35}$$

改变的，则称所给的是一个一阶逆变张量。

T^i 叫做这个张量的坐标。

逆变张量的坐标 T^i 的变换，是借助于基矢量 e_i 变换矩阵 $(\alpha_{i'}^{i})$ 的转置逆矩阵 $(\alpha_i^{i'})$ 实现的。因此，任一固定矢量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标 x^i 构成一个一阶逆变张量。而且反之亦真。

显然，k 次逆变张量 $T^{i_1 i_2 \cdots i_k}$ 的定义可以仿照 k 次协变张量 $T_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ 的定义一样给出。不同的是下列变换规律

$$T^{i_1' i_2' \cdots i_k'} = \alpha_{i_1}^{i_1'} \alpha_{i_2}^{i_2'} \cdots \alpha_{i_k}^{i_k'} T^{i_1 i_2 \cdots i_k} \tag{5—36}$$

代替了变换规律式(5—33)。即对每一个指标重复规律式(5—35)。

在给出张量的一般定义之前，让我们看一个非常重要的例子。

设有一规律 $\mathfrak{A}$，使空间内每一个矢量 $\boldsymbol{x}$ 对应于一个定矢量 $\boldsymbol{y}$：

$$\boldsymbol{y} = \mathfrak{A}\boldsymbol{x} \tag{5—37}$$

并且 $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的线性函数，亦即对任意的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}, \lambda$ 能满足条件：

$$\mathfrak{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \mathfrak{A}\boldsymbol{x}_1 + \mathfrak{A}\boldsymbol{x}_2 \tag{5—38}$$

$$\mathfrak{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\mathfrak{A}\boldsymbol{x} \tag{5—39}$$

则称这一规律为仿射量 $\mathfrak{A}$。

现考察 $\mathfrak{A}$ 的坐标变换规律。设矢量 $\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_i$ 按基矢量的展开为

$$\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_i = a_i^j \boldsymbol{e}_j \tag{5—40}$$

注意到 $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i$，并利用仿射量 $\mathfrak{A}$ 的线性特性，我们有

$$\boldsymbol{y}=\mathfrak{A}\boldsymbol{x}=\mathfrak{A}(x^i\boldsymbol{e}_i)=x^i\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_i=x^ia_i^j\boldsymbol{e}_j$$

另一方面，因为

$$\boldsymbol{y}=y^j\boldsymbol{e}_j$$

比较上面两个展开式，我们得到

$$y^j=a_i^jx^i \tag{5—41}$$

于是，矢量函数 $\boldsymbol{y}$ 的坐标，可用自变矢量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标及系数 a_i^j 线性表示。我们把这些系数 a_i^j 叫做仿射量 $\mathfrak{A}$ 的坐标。在新坐标系中有

$$\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_{i'}=a_{i'}^{j'}\boldsymbol{e}_{j'} \tag{5—42}$$

利用公式

$$\boldsymbol{e}_{i'}=\alpha_{i'}^i\boldsymbol{e}_i \qquad \boldsymbol{e}_j=\alpha_j^{j'}\boldsymbol{e}_{j'}$$

和公式(5—40)，我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_{i'}&=\mathfrak{A}(\alpha_{i'}^i\boldsymbol{e}_i)=\alpha_{i'}^i\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_i=\alpha_{i'}^ia_i^j\boldsymbol{e}_j\\&=\alpha_{i'}^ia_i^j\alpha_j^{j'}\boldsymbol{e}_{j'}\end{aligned}$$

上式与式(5—42)比较，使新坐标系相同基矢量的对应系数相等。得

$$a_{i'}^{j'}=\alpha_{i'}^i\alpha_j^{j'}a_i^j \tag{5—43}$$

这就是仿射量坐标的变换规律。它告诉我们，下指标是按公式(5—25)参与变换的，亦即和协变的情形一样；而上指标是按公式(5—35)参与变换的，亦即和逆变的情况一样。因此，在每一坐标系中，所给的仿射量的坐标的集合 a_i^j，叫做一阶协变一阶逆变的张量。

再看一个重要特例；当仿射量表示恒等变换时，即

$$\boldsymbol{y}=\mathfrak{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$

时，因而 $y^j=x^j$。把它与式(5—41)比较，则在任一坐标系中有

$$a_i^j=\delta_i^j=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\1 & (i=j)\end{cases}$$

于是这个一阶逆变一阶协变张量，在任一坐标系中具有同样的一些坐标 δ_i^j。这个张量叫做单位张量。实际上，从公式(5—43)的右边有

$$\alpha_{i'}^i\alpha_j^{j'}\delta_i^j=\alpha_{i'}^k\alpha_k^{j'}=\delta_{i'}^{j'}$$

这说明 δ_i^j 确实满足变换规律式(5—43)并保持不变的。

最后，我们给出张量的一般定义如下：

设在每一坐标系中，给出以 k 个下指标及 l 个上指标而编号的 n^{k+l} 个数 $T_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{j_1 j_2 \cdots j_l}$，并且在坐标系变换下，它们是按下列规律而改变的

$$T_{i_1' i_2' \cdots i_k'}^{j_1' j_2' \cdots j_l'} = \alpha_{j_1}^{j_1'} \alpha_{j_2}^{j_2'} \cdots \alpha_{j_l}^{j_l'} \alpha_{i_1'}^{i_1} \cdots \alpha_{i_k'}^{i_k} T_{i_1 \cdots i_k}^{j_1 \cdots j_l} \tag{5—44}$$

则称所给的是一个 k 次协变 l 次逆变的 $k+l$ 阶混合张量。

这里的下指标因所记的位置有第 1，第 2，…，第 k 位的不同而彼此相区别；同样各个上指标亦因位置的不同而相区别。所有这些指标都可独立地取遍 1，2，…，n 诸值。我们把数 $T_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{j_1 j_2 \cdots j_l}$ 叫做这个张量在对应坐标系中的坐标。指标的总数 $k+l$ 叫做张量的阶数。

k 及 l 可以独立地给以任意的值 0，1，2，…。若 $l=k=0$，这就是零阶张量，它只有 $n^0=1$ 个分量 T。这就是过去我们所熟悉的标量。它是个不变量，即在任何坐标系中，T 具有相同的一个数值。

若张量满足等式

$$T_{ik} = T_{ki} \qquad T^{ik} = T^{ki} \tag{5—45}$$

则分别称为二阶对称协变张量、二阶对称逆变张量。

若张量满足等式

$$T_{ik} = -T_{ki} \qquad T^{ik} = -T^{ki}$$

则分别称为二阶反对称协变张量、二阶反对称逆变张量。

对称及反对称的性质是张量的一个固有特性。这一特性在坐标系变换下是不变的。事实上，设 $\varepsilon=\pm 1$ 。由假设我们有

$$T^{ik} = \varepsilon T^{ki}$$

因为

$$T^{i'k'} = \alpha_i^{i'} \alpha_k^{k'} T^{ik} = \alpha_i^{i'} \alpha_k^{k'} \varepsilon T^{ki}$$

所以

$$T^{i'k'} = \varepsilon T^{k'i'}$$

同理可证，若 $T_{ik} = \varepsilon T_{ki}$，则有 $T_{i'k'} = \varepsilon T_{k'i'}$ 。

不难推证，混合张量 T_i^j 没有对称或反对称这一固有特性。

上述讨论的这些结果，不难推广到高阶张量对属于同变性的(即都在上面或都在下面的)两个指标的对称性或反对称性。也能

推广到任意阶张量对都属于同变性的多于两个指标的对称性及反对称性。

§5.4 张量的代数运算

一 张量的加法

设给出两个具有同数个上指标和同数个下指标的同类张量。例如 $\mathbf{T}^{ij}_{pqr}$ 与 $\mathbf{S}^{ij}_{pqr}$。这是两个三次协变及二次逆变的五阶混合张量。在每一坐标系中，把第一个张量的每一个分量加上第二个张量的对应坐标，并取其结果作为新张量的分量

$$\mathbf{R}^{ij}_{pqr} = \mathbf{T}^{ij}_{pqr} + \mathbf{S}^{ij}_{pqr}$$

叫做 $\mathbf{T}^{ij}_{pqr}$ 与 $\mathbf{S}^{ij}_{pqr}$ 之和。

不难证明，$\mathbf{R}^{ij}_{pqr}$ 服从张量的变换规律。事实上，在坐标系变换时，设

$$\mathbf{R}^{i'j'}_{p'q'r'} = \mathbf{T}^{i'j'}_{p'q'r'} + \mathbf{S}^{i'j'}_{p'q'r'}$$

因为

$$\mathbf{T}^{i'j'}_{p'q'r'} = \alpha^{i'}_{i}\alpha^{j'}_{j}\alpha^{p}_{p'}\alpha^{q}_{q'}\alpha^{r}_{r'}\mathbf{T}^{ij}_{pqr}$$

$$\mathbf{S}^{i'j'}_{p'q'r'} = \alpha^{i'}_{i}\alpha^{j'}_{j}\alpha^{p}_{p'}\alpha^{q}_{q'}\alpha^{r}_{r'}\mathbf{S}^{ij}_{pqr}$$

故有

$$\mathbf{R}^{i'j'}_{p'q'r'} = \alpha^{i'}_{i}\alpha^{j'}_{j}\alpha^{p}_{p'}\alpha^{q}_{q'}\alpha^{r}_{r'}\mathbf{R}^{ij}_{pqr}$$

显然，多于两个的同类张量相加，结果得到的仍然是个完全确定的同类张量。

例 1 两个逆变矢量之和就是两个一阶逆变张量之和。

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在基 $\boldsymbol{e}_i$ 下的第 i 个分量分别为 a^i 和 b^i，则

$$a^i + b^i = c^i$$

就是和矢量 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 在基 $\boldsymbol{e}_i$ 下的第 i 个分量。

必须指出：张量的加法运算关于坐标变换是不变的。亦即，在某一坐标系中，一个等于某些张量之和的张量，在其它任一坐标系中仍等于这些张量之和。

例 2 任何一个二阶张量，都可以表示为一个二阶对称张量与一个二阶反对称张量之和，且此表示是唯一的。

证明 以二阶协变张量为例，设

$$A_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$$

其中

$$B_{ij} = B_{ji} \qquad C_{ij} = -C_{ji}$$

则

$$A_{ij} + A_{ji} = (B_{ij} + C_{ij}) + (B_{ji} + C_{ji}) = 2B_{ij}$$

$$A_{ij} - A_{ji} = (B_{ij} + C_{ij}) - (B_{ji} + C_{ji}) = 2C_{ij}$$

所以

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) \qquad C_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$$

即 B_{ij} 和 C_{ij} 由 A_{ij} 唯一确定。

作

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) \quad C_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$$

所以

$$A_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$$

而且

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) = \frac{1}{2}(A_{ji} + A_{ij}) = B_{ji}$$

$$C_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) = -\frac{1}{2}(A_{ji} - A_{ij}) = -C_{ji}$$

证毕。

二　张量的乘法

乘法与加法不同，对任何类型的张量都可以进行乘法运算。但必须指出各个乘数的次序，因为相乘的结果不但与各个乘数有关，而且与它们的次序也有关。

如在一定次序下给出的张量 $\mathbf{T}^{i}_{pq}$ 与 $\mathbf{S}^{j}_{r}$ 的乘积是这样定义的：

在每个坐标系中，将第一个张量的每一个坐标乘上第二个张量的每一个坐标，并取所得的乘积 $\mathbf{T}^{i}_{pq}\mathbf{S}^{j}_{r}$ 作为新张量的坐标 $\mathbf{R}^{ij}_{pqr}$。同时把这些分量编排如下：在下面先写第一个乘数的下指标，然后写第二个乘数的下指标，并保留其原来的次序；又以同样的方法编排上指标。

所得的张量 $\mathbf{R}^{ij}_{pqr}$ 叫做张量 $\mathbf{T}^{i}_{pq}$ 与 $\mathbf{S}^{j}_{r}$ 的乘积。现证明在每一坐标系中所确定的数

$$\mathbf{R}^{ij}_{pqr} = \mathbf{T}^{i}_{pq}\mathbf{S}^{j}_{r} \tag{5—46}$$

是一个张量的分量。为此,先写出各乘数的变换规律

$$T^{i'}_{p'q'} = \alpha^{i'}_{i}\alpha^{p}_{p'}\alpha^{q}_{q'}T^{i}_{pq}$$

$$S^{j'}_{r'} = \alpha^{j'}_{j}\alpha^{r}_{r'}S^{j}_{r}$$

上面等式两边分别相乘,并注意到

$$R^{i'j'}_{p'q'r'} = T^{i'}_{p'q'}S^{j'}_{r'}$$

最后得

$$R^{i'j'}_{p'q'r'} = \alpha^{i'}_{i}\alpha^{j'}_{j}\alpha^{p}_{p'}\alpha^{q}_{q'}\alpha^{r}_{r'}R^{ij}_{pqr} \qquad (5—47)$$

上式表明,在任一坐标系中,由式(5—46)算出的 R^{ij}_{pqr} 总是同一个张量的分量。即乘法运算的确可以决定一个新的张量。

上述一切,对多个张量连乘也是适用的。

必须注意:张量乘法是不符合交换律的。事实上,如

$$\widetilde{R}^{ij}_{pqr} = S^{i}_{p}T^{j}_{qr}$$

与由式(5—46)所确定的 R^{ij}_{pqr} 的对应分量并不相等。

最后,我们看这样的一个例子:T^i 与 S_j 之积为 $R^i_j = T^iS_j$。在§5.3 中知道,R^i_j 总可以看作一个仿射量 $\mathfrak{A}$:

$$y = \mathfrak{A}x \qquad y^i = R^i_jx^j$$

于是 $y^i = T^iS_jx^j$。在§5.2 中知道,S_jx^j 总可以看作矢量 x 的一个线性标量函数 $\varphi(x)$。所以

$$y^i = T^i\varphi(x)$$

而 T^i 总可看作一个固定矢量 T 的分量,故最后得到

$$y = \mathfrak{A}x = T\varphi(x)$$

于是,仿射量作用在自变矢量 x 时,便产生定矢量 T 与线性标量函数 $\varphi(x)$的乘积。

三　张量的缩并

在张量代数的运算中,除了加法、乘法两种运算外,还有叫做缩并的一种独特运算。

现考察一个有协变指标及逆变指标的张量。例如 T^{ijk}_{pq}。先指定任一个上指标,例如第二个,及任一下指标,例如第一个;再从张量的分量中选出使所指定的两个指标具有相同的值 1, 2,…,n;然后对其余指标固定下的这些分量作总和

$$T^{i1k}_{1q} + T^{i2k}_{2q} + \cdots + T^{ink}_{nq} = T^{ik}_{q} \qquad (5—48)$$

或记作

$$\underset{j=p}{\mathrm{Contr}}\mathbf{T}_{pq}^{ijk} = \mathbf{T}_{mq}^{imk} = \mathbf{T}_{q}^{ik} \qquad (5\text{—}49)$$

这种运算叫做张量的缩并。

可证在每一坐标系中，由式(5—49)所决定的数 $\mathbf{T}_q^{ik}$ 是同一个张量的分量，它比原来的张量减少了两阶，(逆变和协变各减少一阶)。事实上，原张量的变换规律是

$$\mathbf{T}_{p'q'}^{i'j'k'} = \alpha_i^{i'}\alpha_j^{j'}\alpha_k^{k'}\alpha_{p'}^{p}\alpha_{q'}^{q}\mathbf{T}_{pq}^{ijk}$$

令 $j' = p' = m'$ 并对 m' 作总和，得

$$\mathbf{T}_{m'q'}^{i'm'k'} = \alpha_i^{i'}\alpha_j^{m'}\alpha_k^{k'}\alpha_{m'}^{p}\alpha_{q'}^{q}\mathbf{T}_{pq}^{ijk}$$

但是，已知

$$\alpha_j^{m'}\alpha_{m'}^{P} = \delta_j^p$$

于是

$$\mathbf{T}_{m'q'}^{i'm'k'} = \alpha_i^{i'}\alpha_k^{k'}\alpha_{q'}^{q}\delta_j^p\mathbf{T}_{pq}^{ijk}$$

注意到 δ_j^p 的性质，在总和中仅保留 $p = j$ 各项。而 $\delta_m^m = 1$，所以因子 δ_m^m 可以不写出。最后有

$$\mathbf{T}_{m'q'}^{i'm'k'} = \alpha_i^{i'}\alpha_k^{k'}\alpha_{q'}^{q}\mathbf{T}_{mq}^{imk}$$

利用记号式(5—49)，则有

$$\mathbf{T}_{q'}^{i'k'} = \alpha_i^{i'}\alpha_k^{k'}\alpha_{q'}^{q}\mathbf{T}_{q}^{ik}$$

上式说明 $\mathbf{T}_q^{ik}$ 是一个新的三阶混合张量。

加法运算产生的是同类张量，乘法运算一般产生比乘数的阶数高的张量，而缩并运算，结果产生比原张量的阶数减少二次。由此，只要张量原来的上下指标个数相同，那末，重复缩并适当次数后，结果可得到一个不变量。

例 3　设有一张量 a_j^i，它总可以对应于一个仿射量 $\mathfrak{A}$，利用缩并，由它产生一个不变量：

$$a = a_i^i = a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n$$

它叫做 $\mathfrak{A}$ 的痕迹。

在张量运算中，最常遇到的运算是乘积与缩并同时进行。例如，线性标量函数 $\varphi(x)$ 的写法

$$\varphi(x) = \varphi_i x^i$$

现在可看作由张量 φ_i 与张量 x^i 相乘然后缩并而得到。同理，双线性标量函数的写法

$$\varphi(x, y) = \varphi_{ij}x^i y^j$$

可看作张量 φ_{ij}、x^p、y^q 相乘然后对指标 i、p 及 j、q 两次缩并的结果。

四　商定则

如所周知，如果 T^i_{jk} 与 S^{pq} 都是张量的分量，由此，经过相乘、缩并的运算后而得到的

$$T^i_{jk}S^{jk} = R^i$$

也是一个张量的分量。反之，如果 S^{pq} 与 R^i 都是张量的分量，试问 T^i_{jk} 是否为张量的分量？关于这点，有下面定理

商定则： 设在

$$T^i_{jk}S^{jk} = R^i$$

中，S^{jk} 为任意张量的分量时，R^i 总是张量的分量，则 T^i_{jk} 也是张量的分量。

证明： 作坐标变换时，设 T^i_{jk}、S^{jk}、R^i 分别为 $T^{i'}_{j'k'}$、$S^{j'k'}$、$R^{i'}$，则

$$T^{i'}_{j'k'}S^{j'k'} = R^{i'} = \alpha^{i'}_i R^i = \alpha^{i'}_i T^i_{jk}S^{jk}$$

此外，因为

$$S^{j'k'} = \alpha^{j'}_j \alpha^{k'}_k S^{jk}$$

故得

$$T^{i'}_{j'k'}\alpha^{j'}_j \alpha^{k'}_k S^{jk} = \alpha^{i'}_i T^i_{jk}S^{jk}$$

即

$$(T^{i'}_{j'k'}\alpha^{j'}_j \alpha^{k'}_k - \alpha^{i'}_i T^i_{jk})S^{jk} = 0 \qquad (5—50)$$

由于上方程对任意的 S^{jk} 成立，故有

$$T^{i'}_{j'k'}\alpha^{j'}_j \alpha^{k'}_k = \alpha^{i'}_i T^i_{jk} \qquad (5—51)$$

或得

$$T^{i'}_{j'k'} = \alpha^{i'}_i \alpha^{j}_{j'} \alpha^{k}_{k'} T^i_{jk} \qquad (5—52)$$

由此可知，T^i_{jk} 是一个张量的分量。

上面我们只对三个特殊类型的张量讨论了定理的证明，但对一般情况显然定理也是成立的。同时作为上述定理的特例，常用下面的定理：

定理　当 a_i、b^j、c^k 分别为三个完全任意的协变与逆变矢量的分量时，

$$T^i_{jk}a_i b^j c^k$$

总是零阶张量，则 T^i_{jk} 是一张量的分量。

当然，这个定理对于一般类型的张量也是成立的。

商定则是用来确定一组量是否构成张量分量的一种比较简单

而间接的检验法。它在今后的张量理论中常用到。

五 指标置换的运算

最后，我们介绍张量的一种最简单的运算，它叫指标置换。设有任一张量，例如 T^{ij}_{pqr}。我们不改变这个张量的坐标本身，而只用另一种方式对它的指标编号。从 T^{ij}_{pqr} 便得到一个同样类型的张量 S^{ij}_{pqr}。假定每一下指标作这样的编号：使原来的第一个记在第二个位置上，第二个记在第三个位置上，第三个记在第一个位置上。可用公式表示如下

$$S^{ij}_{pqr} = T^{ij}_{qrp}$$

由张量的定义便可知道 S^{ij}_{pqr} 与 T^{ij}_{pqr} 是不同的两个张量。此时，我们说张量 S^{ij}_{pqr} 是从张量 T^{ij}_{pqr} 用指标置换而得的。

一般，可作下指标的任意置换，同时又可作上指标的任意置换。但是，上指标与下指标是不能相互置换的。由于上指标与下指标在坐标系变换下的性状各不相同，所以，这种置换的结果已不再是一个张量了。

张量指标置换运算的意义，可以从下面两种运算中体现出来。

对称的运算，它是按下面方法进行的：从已知张量的同类指标中任选 N 个，对它进行 $N!$ 个不同置换，并取所得的 $N!$ 个张量的算术平均值。

当 $N=1$ 时，它不改变张量，这时置换只有一种——恒等置换。

当 $N=2$ 时，我们考察张量 T_{ij}，这里只把参与对称的指标写出，其余的指标均未写出。对称的结果记作

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$$

即把参与对称的指标放在圆括号内。

当 $N=3$ 时，我们把所作出的六个置换取其算术平均值，便有

$$T_{(ijk)} = \frac{1}{6}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} + T_{jik} + T_{ikj} + T_{kji})$$

同理，对任意个可对称的指标可进行对称法。对上指标同样可进行对称法。

若一个张量在转置其任意两个已知指标(必须是同类的)时并不改变，我们就称这个张量关于某几个已知指标是对称的。对称法结果所得的张量显然是关于参与对称的那些指标为对称的张量。

轮换的运算，它是这样进行的：从已知张量的同一类指标中任选 N 个，对它进行 $N!$ 个不同的置换；对偶数次置换取正号，而对奇数次置换取负号，最后取所得的 $N!$ 个张量的算术平均值。

当 $N=1$ 时，只有一个恒等置换，它不改变张量。

当 $N=2$ 时，轮换结果得

$$\mathbf{T}_{[ij]}=\frac{1}{2}(\mathbf{T}_{ij}-\mathbf{T}_{ji})$$

即把参与轮换的指标放在方括号中。

当 $N=3$ 时，得

$$\mathbf{T}_{[ijk]}=\frac{1}{6}(\mathbf{T}_{ijk}+\mathbf{T}_{jki}+\mathbf{T}_{kij}-\mathbf{T}_{jik}-\mathbf{T}_{kji}-\mathbf{T}_{ikj})$$

若一个张量在转置其任意两个已知指标时，即乘上负 1，我们称这个张量关于某几个已知指标(必须是同类的)是斜对称的。例如，二阶协变张量，它的坐标形成一个斜对称矩阵，就是这样的张量：

$$\mathbf{T}_{ij}=-\mathbf{T}_{ji}$$

又如，三阶协变张量而具有下列性质的

$$\mathbf{T}_{ijk}=\mathbf{T}_{jki}=\mathbf{T}_{kij}=-\mathbf{T}_{jik}=-\mathbf{T}_{kji}=-\mathbf{T}_{ikj} \qquad (5\text{—}53)$$

显然，轮换的结果，总可以得到一个这样的张量；它是关于参与轮换的指标的斜对称张量。

若一张量关于已知各指标是斜对称的，则对这些指标的轮换，并不改变其结果。如具有性质式(5—53)的 $\mathbf{T}_{ijk}$，显然有

$$\mathbf{T}_{[ijk]}=\mathbf{T}_{ijk}$$

同时，也不难验证：若斜对称张量的指标中，至少有两个具有相同的值时，则所对应的坐标为零。

§5.5 张 量 场

至今，我们所讨论过的都是一些个别的张量。而通常，几何与

物理的问题都需要研究张量场。因为被考察的几何对象常常是因点的不同而改变的，而物理对象常常与时间和空间有关。

若对每一点 M 给出一个已知类型的固定张量

$$\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}=\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}(M) \tag{5—54}$$

则称所给的是 n 维空间内的一个张量场 $\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}$。

张量场可以不在整个空间给出，而仅仅在某个 n 维区域上（甚至仅在某一个 m 维曲面上，特别是在曲线上）给出。

若把空间放在一个固定的坐标系上，则式(5—54)可改写成函数关系式

$$\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}=\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}(x^1,\ \cdots,\ x^n) \tag{5—55}$$

式中 $x^1,\cdots,x^n$ 是点 M 的坐标。假定这个函数是连续可微至足够次数的。

例 4　两个张量场 $\mathbf{T}_{jk}^i(M)$、$\mathbf{S}_{jk}^i(M)$ 的加法，就是把在每一点 M 的这两个张量所确定的两个张量相加而作出新的张量场

$$\mathbf{R}_{jk}^i(M)=\mathbf{T}_{jk}^i(M)+\mathbf{S}_{jk}^i(M)$$

关于张量代数的其它一切运算也是同样的。但必须假定参与运算的张量都在同一个区域上有定义。

此外，在张量场中还有一个不变的运算——绝对微分。设在张量场 $\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}$ 的定义域 D 上引一曲线

$$x^i=x^i(t)\qquad \alpha\leqslant t\leqslant\beta \tag{5—56}$$

并设 $x^i(t)$ 至少是一次连续可微的。沿这一曲线的张量 $\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}$ 的坐标是参数 t 的复合函数。于是这些函数在曲线上的微分是

$$d\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}}{\partial x^i}dx^i \tag{5—57}$$

可证，$d\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}$ 是一个与 $\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}$ 同类型的张量。实际上，因为

$$\mathbf{T}_{i_1'\cdots i_k'}^{j_1'\cdots j_l'}(M)=\alpha_{j_1}^{j_1'}\cdots\alpha_{j_l}^{j_l'}\alpha_{i_1'}^{i_1}\cdots\alpha_{i_k'}^{i_k}\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}(M) \tag{5—58}$$

由于 $\alpha_{j_1}^{j_1'}\cdots,\alpha_{i_1'}^{i_1}\cdots$，均为常数。故上式对 t 微分得

$$d\mathbf{T}_{i_1'\cdots i_k'}^{j_1'\cdots j_l'}=\alpha_{j_1}^{j_1'}\cdots\alpha_{j_l}^{j_l'}\alpha_{i_1'}^{i_1}\cdots\alpha_{i_k'}^{i_k}d\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}$$

这就是要证明的结论。张量 $d\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}$ 叫做张量 $\mathbf{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}$ 的绝对微分张量。

现考察在每一点 M 上函数式(5—55)关于各自变量的偏导数

的集合，并引入记号

$$\nabla_i \mathbf{T}^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k} = \frac{\partial \mathbf{T}^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^i} \tag{5—59}$$

可证，$\nabla_i \mathbf{T}^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}$ 是一个与原来张量有相同个数上指标，而比原来张量多一个下指标的张量。事实上，因为点 M 的位置可用旧坐标 x^i，也可用新坐标 $x^{i'}$ 来决定。故式（5—58）各项可看作 x^i 的函数，也可看作 $x^{i'}$ 的函数。

式(5—58)各项对 $x^{i'}$ 微分，得

$$\frac{\partial \mathbf{T}^{j_1'\cdots j_l'}_{i_1'\cdots i_k'}}{\partial x^{i'}} = \alpha^{j_1'}_{j_1}\cdots\alpha^{j_l'}_{j_l}\alpha^{i_1}_{i_1'}\cdots\alpha^{i_k}_{i_k'}\frac{\partial \mathbf{T}^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^{i'}}$$

$$= \alpha^{j_1'}_{j_1}\cdots\alpha^{i_1}_{i_1'}\cdots\frac{\partial \mathbf{T}^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$$

在后一式中关于 i 作总和，又因

$$x^i = \alpha^i_{i'}x^{i'}$$

故

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \alpha^i_{i'}$$

因而上述结果又可改写为

$$\nabla_{i'}\mathbf{T}^{j_1'\cdots j_l'}_{i_1'\cdots i_k'} = \alpha^{j_1'}_{j_1}\cdots\alpha^{i_1}_{i_1'}\cdots\alpha^i_{i'}\nabla_i\mathbf{T}^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}$$

上式表明，$\nabla_i \mathbf{T}^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}$ 确实按张量的规律而变换。我们把它叫做原张量的绝对导函数。它也构成一个张量场。

§5.6　n 维欧氏空间中的张量代数

一　度规张量

若在 n 维仿射空间中，预先给定关于自变矢量 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 的一个永远固定的双线性标量函数 $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，使它满足对称条件

$$\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \tag{5—60}$$

及非退化条件；即对每一个 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 可找到一个 $\boldsymbol{y}$ 使

$$\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\neq 0 \tag{5—61}$$

则称此仿射空间为 n 维欧氏空间。

矢量 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 的这个函数叫做它们的标积，并简记作 $\boldsymbol{xy}$ 或 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$〔以代替 $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$〕。矢量 $\boldsymbol{x}$ 的标量平方由下式定义

$$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{xx} \tag{5—62}$$

若两个矢量 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 的标积为零

$$xy = 0 \tag{5—63}$$

时，则称这两个矢量为正交的。

我们称 $\sqrt{x^2}$ 为矢量 x 的长，并记作

$$|x| = \sqrt{x^2} \tag{5—64}$$

两个矢量的标积具有如下性质

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$$

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

当然，关于第二个矢量也具有同样的这些性质。若对两个矢量 x、y 的标积 xy 只能取实数，且对任一矢量 $x \neq 0$ 时有

$$x^2 > 0$$

则我们称所讨论的欧氏空间为真欧氏空间。下面我们讨论的问题都是在这种空间中进行的。

我们知道，给定一个双线性标函数 $\varphi(x, y)$ 相当于给定其系数所组成的二次协变张量 φ_{ij}

$$\varphi_{ij} = \varphi(e_i, e_j) \qquad \varphi(x, y) = \varphi_{ij}x^i y^j$$

特别，在标积 xy 的情况下，系数的张量记作 g_{ij}，并称它为欧氏空间中的度规张量。于是相应地有

$$g_{ij} = e_i e_j \tag{5—65}$$

$$xy = g_{ij}x^i y^j \tag{5—66}$$

因而度规张量的分量是基矢量的标积。特别当 $y = x$ 时，我们得到矢量 x 的标量平方。它可用二次形式表示为

$$x^2 = g_{ij}x^i x^j \tag{5—67}$$

由于标积的对称性

$$xy = yx$$

我们有

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{5—68}$$

非退化条件告诉我们：不存在矢量 $x \neq 0$ 与空间内一切矢量都正交。

如果假定这个条件不满足（即发生度量的退化），则存在这样的一个矢量 $x \neq 0$，使对于任一个矢量 y 有

$$xy = 0$$

即对任意的 $y^1, y^2, \cdots, y^n$ 有

$$g_{ij}x^i y^j = 0 \tag{5—69}$$

这就意味着 y^j 的系数应为零

$$g_{ij}x^i = 0 \quad (5-70)$$

又因 $x \neq 0$,即所有的 x^i 不同时为零。所以含有 n 个未知数 x^i 的 n 个线性齐次方程组(5—70)有非零解。这就要求

$$\mathrm{Det}|g_{ij}| = 0 \quad (5-71)$$

反之，若式(5—71)成立，则可找到方程组(5—70)的非零解 $x^1, \cdots, x^n$。对于它，等式(5—69)对任意的 $y^1, \cdots, y^n$ 都能成立。结果矢量 x 将与所有的 y 都正交。于是发生度量的退化。

所以，度量退化的充要条件是 $\mathrm{Det}|g_{ij}| = 0$。因而，非退化的条件就相当于

$$\mathrm{Det}|g_{ij}| \neq 0 \quad (5-72)$$

如果条件(5—72)在一种坐标系中满足，则必在任一坐标系中也能满足。事实上，因 g_{ij} 的变换规律具有形式

$$g_{i'j'} = \alpha^i_{i'}\alpha^j_{j'}g_{ij}$$

若把矩阵 (g_{ij})、$(g_{i'j'})$ 中的前一个指标看作列的号码，把 $(\alpha^i_{i'})$ 中的下标看作列的号码，而把 $(\alpha^j_{j'})$ 的上标看作列的号码；于是矩阵 $(g_{i'j'})$ 是依次把矩阵 $(\alpha^i_{i'})$、(g_{ij})、$(\alpha^j_{j'})$ 连乘而得的。结果有

$$\mathrm{Det}|g_{i'j'}| = (\mathrm{Det}|\alpha^i_{i'}|)^2\mathrm{Det}|g_{ij}| \quad (5-73)$$

亦即，$\mathrm{Det}|g_{ij}|$ 是权为 2 的相对不变量。显然，当它在一种坐标系中为零(或不为零)时，则在任一坐标系中也必有相同的结果。

现作 (g_{ij}) 的逆矩阵 (g^{ij})。由对称的条件知 (g^{ij}) 是一对称矩阵。又由非退化的条件知，这样的逆阵是存在的。

我们要证明，g^{ij} 是二次逆变张量的分量。事实上，因为矩阵 (g^{ij}) 是矩阵 (g_{ij}) 的逆阵，故有

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k \quad (5-74)$$

当变到新坐标系时，我们假设有

$$g^{i'j'}g_{j'k'} = \delta^{i'}_{k'}$$

因 g_{jk} 是协变张量的分量，所以

$$g_{j'k'} = \alpha^j_{j'}\alpha^k_{k'}g_{jk}$$

代入上式得

$$\alpha^j_{j'}\alpha^k_{k'}g_{jk}g^{i'j'} = \delta^{i'}_{k'}$$

上式两边乘 $\alpha^{k'}_p$，并关于 k' 求总和，得

$$\alpha^{k'}_p\alpha^j_{j'}\alpha^k_{k'}g_{jk}g^{i'j'} = \alpha^{k'}_p\delta^{i'}_{k'}$$

$$\delta^k_p\alpha^j_{j'}g_{jk}g^{i'j'} = \alpha^{i'}_p$$

上式又关于 k 求总和，得

$$\alpha^{j}_{j'}g_{jp}g^{i'j'}=\alpha^{i'}_{p}$$

上式两边乘 g^{pq}，而关于 p 求总和，得

$$\alpha^{j}_{j'}g_{jp}g^{pq}g^{i'j'}=\alpha^{i'}_{p}g^{qp}$$

$$\alpha^{j}_{j'}\delta^{q}_{j}g^{i'j'}=\alpha^{i'}_{p}g^{qp}$$

上式对 j 求总和，得

$$\alpha^{q}_{j'}g^{i'j'}=\alpha^{i'}_{p}g^{qp}$$

再向上式两边乘以 $\alpha^{q'}_{q}$，并关于 q 求总和，得

$$\alpha^{q'}_{q}\alpha^{q}_{j'}g^{i'j'}=\alpha^{q'}_{q}\alpha^{i'}_{p}g^{qp}$$

$$\delta^{q'}_{j'}g^{i'j'}=\alpha^{q'}_{q}\alpha^{i'}_{i}g^{qi}$$

上式关于 j' 求总和，得

$$g^{i'q'}=\alpha^{i'}_{i}\alpha^{q'}_{q}g^{iq}$$

因此，g^{ij} 的确是一个逆变张量的分量。并把 g^{ij} 叫做与协变张量 g_{ij} 共轭的逆变张量。

二　指标的上升与下降

仿射空间中的张量运算，对欧氏空间仍旧可用。但这时还出现一种新的运算——上下指标的互相转移。

现在证明在欧氏空间中每一逆变指标可以“改作”协变指标。反之亦可。先考察一阶逆变张量 x^i。利用它与度规张量相缩并的方法，可以“改作”协变张量

$$x_i=g_{ij}x^j \tag{5—75}$$

因为欧氏空间中的度规张量是给定的，所以张量 x^j 的“指标下降”运算是单值地确定的。

反之，任一个一阶协变张量 x_j，利用与逆变度规张量的相缩并方法，可以“改作”逆变张量

$$x^i=g^{ij}x_j \tag{5—76}$$

这个“指标上升”的运算也是单值地确定的。

我们知道，逆变张量的坐标 x^i 总可以看作某一个矢量的分量

$$\boldsymbol{x}=x^i\boldsymbol{e}_i$$

而

$$x_i=g_{ij}x^j=(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)x^j=(\boldsymbol{e}_i,\ x^j\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_i$$

因此，对矢量 $\boldsymbol{x}$ 的分量 x^i 的指标下降，实质上是这一矢量与基矢量的标积。这些标积叫做矢量 $\boldsymbol{x}$ 的协变坐标 x_i。

对高阶张量，按公式(5—75)、(5—76)，可使(任一个)指标下

降或上升。但必须变更欧氏空间内张量的指标编号法。即把上下指标的位置编排在一个集合内，使每一个号码仅对应一个指标；在上面或者在下面。例如，若第三个指标在上面，则在下面的第三个位置是“空的”，并在这里记上一点。反之也是这样。如 $\mathbf{T}_{ij\cdot l}^{\cdot\cdot k\cdot}$，它表示第一、二、四个指标是协变的，而第三个指标是逆变的。如果希望把第一个指标“上升”，于是得

$$\mathbf{T}^{i\cdot k\cdot}_{\cdot j\cdot l}=g^{ip}\mathbf{T}_{pj\cdot l}^{\cdot\cdot k\cdot}$$

同理，若把上指标下降，则得

$$\mathbf{T}_{ijkl}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}=g_{kp}\mathbf{T}_{ij\cdot l}^{\cdot\cdot p\cdot}$$

现在看一个重要的例子：上升 g_{ij} 的第二个指标，则得到单位张量

$$g_{i\cdot}^{\cdot j}=g^{jp}g_{ip}=\delta_i^j$$

若再上升它的下标，则得

$$g^{ij}_{\cdot\cdot}=g^{ip}\delta_p^j=g^{ij}$$

因此，当 g_{ij} 的两个指标都上升时，便得到一个逆变的度规张量。

又如，仿射量 $\boldsymbol{y}=\mathfrak{A}\boldsymbol{x}$ 是由张量 a_j^i 而决定，则

$$y^i=a^i_{\cdot j}x^j$$

当指标 i 下降时，有

$$y_i=g_{ip}a^p_{\cdot j}x^j=a_{ij}x^j$$

因而仿射量 $\mathfrak{A}$ 也可用二次逆变张量 a_{ij} 来决定。此时，它的分量所构成的变换矩阵，把自变矢量 $\boldsymbol{x}$ 的逆变分量变到矢函数 $\boldsymbol{y}$ 的协变分量上。

显然，指标下降与上升在仿射空间内是没有任何意义的。

§5.7　仿射空间中的曲线坐标及其张量

设在 n 维仿射空间中有一仿射坐标系 $\mathfrak{R}(0,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$，则每点 M 的矢径 $\boldsymbol{OM}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{OM}=x^i\boldsymbol{e}_i \tag{5—77}$$

当坐标系变换时，点 M 的坐标变换为

$$x^{i'}=\alpha_i^{i'}x^i+\alpha^{i'} \tag{5—78}$$

只要满足条件

$$\mathrm{Det}\,|\alpha_i^{i'}|\neq 0$$

则其系数可任意选择。这时，所取基矢量的变换关系为

$$e_{i'} = \alpha_{i'}^{i} e_i$$

而一个不变矢量 x 的坐标所受到的变换为

$$x^{i'} = \alpha_i^{i'} x^i$$

现把坐标变换式（5—78）推广，将右边 x^i 的线性函数代以满足某些条件的"任意"函数。这就是在第四章中曾经讨论过的曲线坐标。

设在仿射空间的某一个 n 维连通区域 Ω 中，给定了仿射坐标的 n 个连续可微的单值函数 $f_k(x^1,\cdots,x^n)$ $(k=1,\cdots,n)$。利用方程

$$x^{i'} = f_i(x^1, \cdots, x^n) \tag{5—79}$$

引入新的变量 $x^{1'},x^{2'},\cdots,x^{n'}$。并要求式（5—79）可把 x^i 单值地表成 $x^{i'}$ 在它们整个变化区域 Ω' 中的连续可微的函数

$$x^i = g_i(x^{1'}, \cdots, x^{n'})$$

此时我们把变量 $x^{i'}$ 叫做仿射空间区域 Ω 中的曲线坐标。

从上述定义可知，Ω' 中的变量 $x^{i'}$ 与 Ω 中的仿射坐标之间，是由可逆的、双方为单值的、连续可微的变换相联系着的。而 f_i、g_i 的连续可微是指具有一直到某一阶数 N 的连续偏导数(数 N 由讨论需要而确定)。

必须指出，正和逆两种变换的雅可比行列式均不为零

$$\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right| \neq 0 \qquad \mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right| \neq 0 \tag{5—80}$$

并且对应的矩阵是互逆的。

事实上，x^i 关于自变量 $x^1,\cdots,x^n$ 中每一个自变量的偏导，由复合函数的求导法则给出

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \qquad \text{(关于}k'\text{求总和)}$$

另一方面，又因为

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$$

故有

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta_j^i$$

亦即，矩阵 $(\partial x^i/\partial x^{k'})$ 与 $(\partial x^{k'}/\partial x^j)$ 的积是一单位矩阵。所以，这两个矩阵是互逆的。因而是非奇异的。

必须注意：如果我们用条件

$$\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right| \neq 0 \tag{5—81}$$

取代式(5—80)的可逆性要求。那末即使式(5—81)在整个区域 Ω 上能满足，也只能保证在区域中每一点的某一个邻域中单值可逆性，而不能保证在整个区域 Ω 中的单值可逆性。

还应指出：在同一区域中，从一个曲线坐标系 $x^{i'}$ 变到另一个曲线坐标系 $x^{i''}$ 所要求满足的条件，与从仿射坐标 x^{i} 变到曲线坐标 $x^{i'}$ 所要求满足的条件是一样的。

在曲线坐标系中，x^{i} 用 $x^{i'}$ 来表示，便有

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM} = g_i(x^{1'}, \cdots, x^{n'})\boldsymbol{e}_i \tag{5—82}$$

或简记为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^{1'}, \cdots, x^{n'}) \tag{5—83}$$

它与 g_i 有相同次数的连续可微性。而且所有偏导数

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{1'}}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{n'}} \tag{5—84}$$

在每一点都是线性无关的矢量。其实，将式(5—82)关于 $x^{i'}$ 求偏导数，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\boldsymbol{e}_i \tag{5—85}$$

因为矩阵 $(\partial x^{i}/\partial x^{i'})$ 是非奇异的。所以式(5—84)线性无关。

设在曲线坐标中给出矢径函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^{1}, \cdots, x^{n}) \tag{5—86}$$

若沿曲线上只有一个坐标 x^{i} 在变化，而其余的坐标保持常数，则称这样的曲线为坐标曲线。例如坐标曲线 x^{1}，就是让 $x^{2},\cdots,x^{n}$ 固定。于是式(5—86)的矢径 $\boldsymbol{r}$ 变为一个变量 x^{1} 的函数。我们就得到以 x^{1} 为参数的曲线。

这样一来，通过每一点 M，有一条而且只有一条坐标曲线 x^{1}，沿着它，$x^{2},\cdots,x^{n}$ 固定地取在点 M 的值。偏导数 $\partial\boldsymbol{r}/\partial x^{1}$ 是坐标曲线 x^{1} 的切矢量。上述一切，对任何坐标曲线 x^{i} 均成立。所以通过每一点 M，有 n 条具有切矢量 $\partial\boldsymbol{r}/\partial x^{i}$ 的坐标曲线。并简记为

$$\boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i}} \tag{5—87}$$

而这 n 个矢量是线性无关的。我们在每一点 M 可取这些矢量为

基矢量。于是，在区域 Ω 中给定了曲线坐标，就在每一点 M 引出一个完全确定的仿射标架 $\{M, \boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n\}$。这个仿射标架叫做点 M 的局部标架。

当我们取仿射坐标作为曲线坐标的特殊情形时，就有

$$\boldsymbol{r} = x^i \boldsymbol{e}_i \qquad \boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{e}_i$$

此时每点的局部标架基矢量便与已知仿射坐标系中的基矢量完全相同。

现考察当曲线坐标受到变换

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \cdots, x^n) \tag{5—88}$$

时，局部标架所发生的变化。假定此变换是单值可逆的，且双方连续可微。反过来有

$$x^i = x^i(x^{1'}, \cdots, x^{n'}) \tag{5—89}$$

就可把方程 (5—86) 中的矢径 $\boldsymbol{r}$ 看作 $x^{i'}$ 的复合函数。于是，关于 $x^{i'}$ 的偏导数有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \qquad \text{（关于}i\text{作总和）}$$

由式(5—87)，最后得到

$$\boldsymbol{r}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\boldsymbol{r}_i \tag{5—90}$$

因此，曲线坐标的变换在每一点 M 引起了局部标架的变换。同时，新的局部标架的基矢量按旧标架的基矢量展开时的系数为

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$$

且

$$\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right| \neq 0$$

把式(5—90)和以前的仿射坐标系变换的记法

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \alpha^i_{i'}\boldsymbol{e}_i$$

相比较，我们看到，前者是后者的个别情形，此时

$$\alpha^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \tag{5—91}$$

而以 $\boldsymbol{r}_i$、$\boldsymbol{r}_{i'}$ 代替 $\boldsymbol{e}_i$、$\boldsymbol{e}_{i'}$。

现考察任一张量场，例如 $\mathbf{T}^i_{jk}(M)$。我们知道，在曲线坐标系中，每一点 M 产生一个局部标架。于是我们就关于这个标架来取

张量 $\mathbf{T}^i_{jk}(M)$ 的坐标。这些坐标我们叫做张量 $\mathbf{T}^i_{jk}(M)$ 在已知曲线坐标系 x^i 中的坐标。以后，凡是谈到张量场

$$\mathbf{T}^i_{jk}(M) = \mathbf{T}^i_{jk}(x^1, \cdots, x^n) \tag{5—92}$$

时，总是指上述的意义。

当曲线坐标变换时，在每一点 M 产生的局部标架也在变换。而张量 $\mathbf{T}^i_{jk}(M)$ 的坐标也应按通常张量的变换规律

$$\mathbf{T}^{i'}_{j'k'}(M) = \alpha^{i'}_i \alpha^j_{j'} \alpha^k_{k'} \mathbf{T}^i_{jk}(M) \tag{5—93}$$

由式(5—90)可知

$$\alpha^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M) \qquad \alpha^j_{j'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M) \qquad \alpha^k_{k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M)$$

于是式(5—93)便具有如下形式

$$\mathbf{T}^{i'}_{j'k'}(M) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M) \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M) \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M) \mathbf{T}^i_{jk}(M) \tag{5—94}$$

因为张量的代数运算是分别在每一点 M 进行的，而现在每一点各自有一局部标架 $\{M, \mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_n\}$。所以在 §5.4 中所论述过的一切张量代数运算，对于曲线坐标系中的张量场也是完全适用的。

特别指出，在一点 M 给定的任一矢量 $\mathbf{A}$，总是对于点 M 的局部标架而言的。它的坐标 a^i 总是指关于该点的局部标架的坐标。所以有

$$\mathbf{A} = a^i \mathbf{r}_i$$

§5.8 平行移动与联络对象

现考察当区域 Ω 取曲线坐标 x^i 时，设在点 M_0 矢量 $\mathbf{A}_0$ 的坐标为 a^i_0，如何从另一点 M_1 作出这个矢量。先考察 $\mathbf{A}_0$ 沿任一曲线 $\overset{\frown}{M_0M_1}$ 连续移动时，其坐标 a^i 在路径的每一无限小段连续变化的过程。

设路径 $\overset{\frown}{M_0M_1}$ 是由参数方程

$$x^i = x^i(t) \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{5—95}$$

给出。$x^i(t)$ 是连续可微的函数。在此路径上的每一点 $M(t)$，作这个常矢量 $\mathbf{A}_0$。由于局部标架随点的位置而变，因而 a^i 也随点的位置而改变。所以，坐标 a^i 依赖于 t，即

$$a^i = a^i(t) \tag{5—96}$$

因为 $x^i(t)$ 是连续可微的，我们立刻得到，局部标架的基矢量 $\boldsymbol{r}_i(x^1,\cdots,x^n)$ 以及 a^i 沿此路径是 t 的连续可微函数(假定 $N=2$)。

按点 $M(t)$的局部标架基矢量展开 $\boldsymbol{A}_0$，有

$$\boldsymbol{A}_0=a^i(t)\boldsymbol{r}_i(x^1,\ \cdots,\ x^n) \tag{5—97}$$

对 t 逐项微分上式。因为 $\boldsymbol{A}_0$ 为常矢量，我们得到

$$0=(da^i)\boldsymbol{r}_i+a^i d\boldsymbol{r}_i \tag{5—98}$$

为了分析此结果，我们把矢量 $d\boldsymbol{r}_i$ 按局部标架基矢量展开。由全微分公式，得

$$d\boldsymbol{r}_i(x^1,\ \cdots,\ x^n)=\boldsymbol{r}_{ij}dx^j \tag{5—99}$$

其中

$$\boldsymbol{r}_{ij}=\frac{\partial^2\boldsymbol{r}(x^1,\ \cdots,\ x^n)}{\partial x^i\partial x^j}$$

在区域 Ω 内每一点都能确定矢量 $\boldsymbol{r}_{ij}$，并可按这点的局部标架基矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 展开

$$\boldsymbol{r}_{ij}=\Gamma_{ij}^k\boldsymbol{r}_k \tag{5—100}$$

Γ_{ij}^k 表示展开式的系数；k 是求总和指标。显然有

$$\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_{ji}$$

又因按标架基矢量的展开式是唯一的。故得

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k \tag{5—101}$$

而 Γ_{ij}^k 又依赖于作展开式(5—100)所在的那个点，故

$$\Gamma_{ij}^k(M)=\Gamma_{ij}^k(x^1,\ \cdots,\ x^n) \tag{5—102}$$

在已知曲线坐标系 x^i 中，区域 Ω 上每一点 M 以上述的方式所确定的 Γ_{ij}^k，称为联络系数。

现把式(5—100)代入式(5—99)中，得

$$d\boldsymbol{r}_i=\Gamma_{ij}^k\boldsymbol{r}_k dx^j$$

因而式(5—98)具有

$$0=\boldsymbol{r}_k da^k+\Gamma_{ij}^k\boldsymbol{r}_k a^i dx^j$$

的形式。由于 $\boldsymbol{r}_k$ 是线性无关的，故有

$$da^k+\Gamma_{ij}^k a^i dx^j=0$$

或可写成

$$da^k=-\Gamma_{ij}^k a^j dx^i \tag{5—103}$$

这就是在无限小范围内，矢量平行移动的公式。它指出，若点 $M(x^i)$ 上一矢量具有坐标 a^k；则在无限接近的一点 $M'(x^i+dx^i)$，同是这个矢量，将具有怎样的坐标。同时，da^k 与 a^j 及 dx^i 线性相关的系数为 Γ_{ij}^k。借助于这些系数，在点 M 的各矢量与在点 M' 的

各矢量相互联系着。这就是“联络系数”这一名称的具体含意。

假如我们希望把所得的公式(5—103)应用到矢量沿有限路径 $\overset{\frown}{M_0M_1}$ 上移动，则必须把对应的微分方程组来积分。在这里暂不讨论。

在仿射坐标 x^i 的情况下

$$\boldsymbol{r}(x^1,\cdots,x^n)=x^i\boldsymbol{e}_i\qquad \boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{e}_i\qquad \boldsymbol{r}_{ij}=0$$

于是由式(5—100)得

$$\Gamma^k_{ij}=0$$

反之，若任一曲线坐标系中，$\Gamma^k_{ij}(x^1,\cdots,x^n)$ 恒为零，则由式(5—100)得

$$\boldsymbol{r}_{ij}=0\qquad \boldsymbol{r}_i=\text{常矢量}$$

记 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{e}_i$，最后我们得到

$$\boldsymbol{r}=x^i\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{r}_0$$

矢径这一表达式(其中 $\boldsymbol{r}_0$ 为常矢量)说明了 x^i 是仿射坐标(原点移到点 $\boldsymbol{r}_0$)。

因此，在所考察的区域 Ω 中，曲线坐标为仿射坐标的充要条件是，在这些坐标中 Γ^k_{ij} 恒为零。

现考察当坐标系变换时 Γ^k_{ij} 的变换规律。事实上，在旧坐标以及其对应的新坐标中，我们有

$$\boldsymbol{r}_{ij}=\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{r}_k\qquad \boldsymbol{r}_{i'j'}=\Gamma^{k'}_{i'j'}\boldsymbol{r}_{k'}\tag{5—104}$$

把 $\boldsymbol{r}(x^1,\cdots,x^n)$ 当作 $x^{i'}$ 的复合函数求偏导数，有

$$\boldsymbol{r}_{i'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\boldsymbol{r}_i\tag{5—105}$$

把 $\boldsymbol{r}_i(x^1,\cdots,x^n)$ 看作 $x^{j'}$ 的复合函数，关于 $x^{j'}$ 再求偏导。因为

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial x^{j'}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}=\boldsymbol{r}_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$$

故由式(5—105)我们得到

$$\boldsymbol{r}_{i'j'}=\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\boldsymbol{r}_i+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\boldsymbol{r}_{ij}\tag{5—106}$$

在右边第一项中，把 i 换成 k，并利用式(5—104)的前一展开式，则式(5—106)可改写为

$$\boldsymbol{r}_{i'j'}=\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}\right)\boldsymbol{r}_k\tag{5—107}$$

注意到式(5—105)，我们有

$$\boldsymbol{r}_k=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\boldsymbol{r}_{k'}\tag{5—108}$$

将上式代入式(5—107)中，最后得到

$$r_{i'j'}=\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}r_{k'}$$

将此式与式(5—104)的后一展开式相比较，我们得到

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}=\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij} \tag{5—109}$$

这就是联络系数的变换规律。显然，Γ^k_{ij} 并不构成一个张量。

若对每一曲线坐标系 x^i，在一已知点 M 给定了一组数 Γ^k_{ij}，且当曲线坐标系变换时，它们是按式(5—109)而变的。那么，我们就说在点 M 给定了一个联络对象。

如果在区域 Ω 上每一点考察

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}(M)=\Gamma^k_{ij}(x^1,\ \cdots,\ x^n)$$

便构成了一联络对象场。

§5.9 欧氏空间中的曲线坐标

在仿射空间中引入度量便得到欧氏空间。因此§5.7～§5.8中关于曲线坐标所述的一切，对欧氏空间仍能成立。但是，度量的引入，将意味着有些新的问题出现。这些问题我们将在本节中加以研究。

我们知道，度量的给定，在于度规张量 g_{ij} 的给定。而它可按任一仿射坐标系给定。这时有公式

$$g_{ij}=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

在曲线坐标 x^i 中研究 g_{ij} 时，我们在每一点 M 按相应的局部标架 $\{M,\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n\}$ 来给定它的坐标。这时，它的坐标将用下列标积来表示

$$g_{ij}(M)=\boldsymbol{r}_i(M)\boldsymbol{r}_j(M) \tag{5—110}$$

因此，度规张量必须看作张量场；它的坐标是点的函数

$$g_{ij}(M)=g_{ij}(x^1,\ \cdots,\ x^n)$$

当变到新的曲线坐标时，$g_{i'j'}$ 按下列规律

$$g_{i'j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}g_{ij}$$

而变。

现从给定 g_{ij} 的基础上导出欧氏空间的某些性质。显然，对任意点 M 的局部标架所对应的 $g_{ij}(M)$，可以重复作在§5.6中所述

的一切。

考察由参数 t 给定的曲线

$$x^i = x^i(t) \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

任一点的矢径可表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, \cdots, x^n)$$

而沿曲线所取的点 $x^1,\cdots,x^n$ 又依赖于 t。由此，在曲线上任一点 M 的切矢量具有形式

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt}\mathbf{r}_i$$

即切矢量 $d\mathbf{r}/dt$ 在局部标架中有坐标 dx^i/dt。这些坐标构成一个一阶逆变张量。事实上，当变到新的曲线坐标 $x^{i'}$ 时，有

$$\frac{dx^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}$$

这表明 dx^i/dt 满足张量的变换规律。

当矢径沿曲线作无限小位移时，按全微分公式得

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}dx^i = \mathbf{r}_i dx^i \tag{5—111}$$

dx^i 为 $d\mathbf{r}$ 的坐标。又因

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}dx^i$$

所以 dx^i 构成一个一阶逆变张量。

矢量 $d\mathbf{r}/dt$ 的数量平方有下面形式

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

由此得

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2} = \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}$$

曲线长由下列形式给出

$$\overset{\frown}{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} |d\mathbf{r}| = \int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|dt$$

因而

$$\overset{\frown}{M_1M_2} = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt$$

显然，也可用弧的微分给出

$$ds = |d\boldsymbol{r}| = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}$$

或

$$(ds)^2 = g_{ij}(x^1, \cdots, x^n)dx^i dx^j \tag{5—112}$$

即沿任一曲线，在任一无限小位移下，弧的微分的平方可表示为曲线坐标的二次微分形式。这个二次形式叫做度量的二次形式。由于它是由度规张量 g_{ij} 与逆变张量 dx^i 两次缩并的结果，因此，它是个不变量。即在坐标变换下是不变的。

现在，我们取仿射空间的联络对象 Γ^k_{ij} 作为欧氏空间的联络对象。并考察在任意曲线坐标系中，如何用度规张量 $g_{ij}(M)$ 来表示 $\Gamma^i_{jk}(M)$。

根据式(5—100)，联络系数可由下式给出

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{r}_k$$

用 $\boldsymbol{r}_l$ 乘上式得

$$\boldsymbol{r}_l\boldsymbol{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}g_{lk} \tag{5—113}$$

我们看到，上式右边从形式上是由 Γ^k_{ij} 下降上指标而得到的。由此，我们记

$$\Gamma_{l,ij} = g_{lk}\Gamma^k_{ij} \tag{5—114}$$

反之，Γ^k_{ij} 可从 $\Gamma_{l,ij}$ 上升第一个下指标而得到

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{l,ij} \tag{5—115}$$

于是，只要算出 $\Gamma_{l,ij}$，便能计算 Γ^k_{ij}，由式(5—113)

$$\Gamma_{l,ij} = \boldsymbol{r}_l\boldsymbol{r}_{ij}$$

显然有

$$\Gamma_{l,ij} = \Gamma_{l,ji}$$

为了用 g_{ij} 来表示这些未知量，我们对 $g_{lk} = \boldsymbol{r}_l\boldsymbol{r}_k$ 逐项关于 x^m 求偏导，得

$$\boldsymbol{r}_{lm}\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{r}_l\boldsymbol{r}_{km} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}$$

即

$$\Gamma_{k,lm} + \Gamma_{l,km} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \tag{5—116}$$

我们得到含有两个未知量的一个方程（当 k、l、m 固定时）。若对 k、l、m 进行循环置换两次，则共有三个方程。所得的另两个方程为

$$\Gamma_{l,mk} + \Gamma_{m,lk} = \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}$$

$$\Gamma_{m,kl} + \Gamma_{k,ml} = \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^l}$$

因 $\Gamma_{l,ij}$ 关于 i、j 对称，故在右边实际只有三个未知量，它们两两之和由下式给出

$$\Gamma_{k,lm}+\Gamma_{l,mk}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}$$

$$\Gamma_{l,mk}+\Gamma_{m,kl}=\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}$$

$$\Gamma_{m,kl}+\Gamma_{k,lm}=\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}$$

这组方程可用初等方法解出。把前两方程两边相加，再减去第三个方程，得

$$2\Gamma_{l,mk}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}$$

最后得

$$\Gamma_{l,mk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}\right) \tag{5—117}$$

代入式(5—115)得

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) \tag{5—118}$$

所得 $\Gamma_{l,mk}$ 及 Γ^k_{ij} 的表达式，分别称为第一类及第二类克里斯托弗尔(Christoffel)三指标记号，简称克氏记号。

§5.10 仿射联络空间

一 矢量的平行移动

若在 n 维空间 R^n 中，对每一坐标系 x^i，在一已知点 M 给定了一组（n^3 个）数 Γ^k_{ij}，并且在坐标变换

$$x^{i'}=x^{i'}(x^1,\ \cdots,\ x^n)$$

下，它们是按下列规律

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}=\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij} \tag{5—119}$$

变化，则称在点 M 给定了一个联络对象（或联络系数），其中偏导数是在点 M 取值的。

假定在空间 R^n 中给定了联络对象场

$$\Gamma^k_{ij}(M)=\Gamma^k_{ij}(x^1,\ \cdots,\ x^n)$$

而且这些函数是连续可微的，则称 R^n 为仿射联络空间，并记作 L^n。一般来说

$$\Gamma^k_{ij} \neq \Gamma^k_{ji}$$

这一点是和仿射空间的联络对象不相同的。

为了计算方便，我们用别的形式给出式(5—119)。为此，把式(5—119)各项乘上 $\partial x^l/\partial x^{k'}$，并关于 k' 求和。因为

$$\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} = \delta^l_k$$

故得

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\delta^l_k + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}\delta^l_k$$

对 k 作总和，最后得

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^l_{ij} \tag{5—120}$$

为了使用方便，把上式中 x^i 与 $x^{i'}$ 的作用互相交换。我们得

$$\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\Gamma^{l'}_{i'j'} \tag{5—121}$$

在式(5—119)中，Γ^k_{ij} 的变换规律包括两项：第一项不依赖于旧坐标系中的 Γ^k_{ij}，第二项依赖于 Γ^k_{ij}，并和张量的变换规律形式完全相同。由于第一项对两个下标 i'、j' 是对称的，它一般不为零。所以 Γ^k_{ij} 不是一个张量。但是

$$\mathbf{T}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \tag{5—122}$$

却构成一个张量。事实上，把式(5—119)改写一下，使指标 i'、j' 互换，并交换总和指标 i、j 的位置，便得

$$\Gamma^{k'}_{j'i'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma^k_{ji} \tag{5—123}$$

从式(5—119)减去这一等式，便得

$$\mathbf{T}^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\mathbf{T}^k_{ij}$$

这就是 $\mathbf{T}^k_{ij}$ 所满足的张量变换规律。我们把 $\mathbf{T}^k_{ij}(M)$ 称为 L^n 的挠率张量。若 $\mathbf{T}^k_{ij}$ 为零，即

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \tag{5—124}$$

则称所给定的空间是无挠率的仿射联络空间，并记作 L^n_0。

现考察 L^n 中的矢量平行移动。我们可以用类似于§5.8的方法来定义 L^n 中的平行移动。

设沿某一曲线

$$x^i = x^i(t) \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

给定了矢量场

$$a^i = a^i(t) \tag{5—125}$$

如果矢量沿曲线上每一无限小作位移时，它的坐标 $a^i(t)$ 按规律

$$da^k = -\Gamma^k_{ij} a^j dx^i \tag{5—126}$$

而改变，则称矢量 $a^i(t)$ 沿曲线平行移动。

现必须证明式(5—126)的不变性：即若条件(5—126)在坐标 x^i 中能满足，则在坐标 $x^{i'}$ 中也能满足。

为此，我们来计算 $da^{k'}(t)$。由张量的变换规律

$$a^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} a^k$$

有

$$\begin{aligned} da^{k'} &= \left(d\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right) a^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} da^k \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^k \partial x^i} dx^i\right) a^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} da^k \end{aligned}$$

在第一项中，把总和指标 k 换成 j，并根据式(5—126)把 da^k 代入，得

$$da^{k'} = \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij}\right) a^j dx^i \tag{5—127}$$

利用公式(5—121)(其中的 l' 用 k' 代替)，我们得出上式圆括弧内的表达式为

$$-\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \Gamma^{k'}_{i'j'}$$

又因

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i = dx^{i'} \qquad \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} a^j = a^{j'}$$

故式(5—127)化为

$$da^{k'} = -\Gamma^{k'}_{i'j'} a^{j'} dx^{i'}$$

这就证明了式(5—126)的不变性。

为了研究矢量沿曲线如何实现这一平行移动的，我们把公式(5—126)改写成

$$\frac{da^k}{dt} = -\Gamma^k_{ij}[x^1(t), \cdots, x^n(t)] a^j \frac{dx^i(t)}{dt} \tag{5—128}$$

上方程中，除 $a^k(t)$ 外，所有 t 的函数是已知的，只有 $a^k(t)$ 为未知函数。于是得到含有 n 个函数的正规线性常微分方程组。在我们的假设下，其系数是 t 的连续函数。由微分方程理论知，此方程组

对任意的初始条件

$$a^k = a_0^k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{5—129}$$

在 t 的整个变化区间内有唯一解 $a^k(t)$。

它的几何意义是：在曲线上某一点 $M_0(t_0)$ 给定的矢量 a_0^k，可以沿整个曲线作平行移动，并且只有唯一的一种方式。矢量 a_0^k 移动到曲线上任一点 $M(t)$时具有形式 $a^k(t)$。

和仿射空间不同，这种平行移动一般来说是与路径有关的。

二 测地线

在 L^n 中的测地线与仿射空间中的直线作用相近，它们都具有常方向的基本性质。我们将仿照这一性质来作出测地线的定义。

在 L^n 中若切于一曲线上任一点 M_0 的每一个矢量 a_0^i，沿这曲线作平行移动时仍切于这一曲线，则这一曲线便叫做测地线。

设测地线是由方程

$$x^i = x^i(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

给出。$x^i(t)$ 是二次连续可微函数。又设沿测地线平行移动的切矢量为 $a^i(t)$。由于在曲线上每点所有的切矢量都是共线的，故可记作

$$\frac{dx^i}{dt} = \lambda a^i \tag{5—130}$$

式中 $\lambda = \lambda(t)$。沿测地线总可选 τ 参数，使 $\lambda \equiv 1$。为此，只要令

$$\tau = \int \lambda(t)dt$$

因而式(5—130)具有下列形式

$$\frac{dx^i}{d\tau} = a^i \tag{5—131}$$

此时 τ 称为典型参数。典型参数总能选出，而且不是唯一的。事实上，若

$$\tau^* = A\tau + B \qquad (A、B\text{为常数})$$

若 τ 为典型参数时，则 τ^* 也是典型参数($A \neq 0$)。因为

$$d\tau^* = Ad\tau \qquad \frac{dx^i}{d\tau^*} = \frac{1}{A}\frac{dx^i}{d\tau}$$

于是 $dx^i/d\tau^*$ 和 $dx^i/d\tau$ 均为平行移动的切矢量。

现考察以 τ 为参数的测地线参数方程

$$x^i = x^i(\tau)$$

应用平行移动的公式(5—126)于矢量 $dx^i/d\tau$，我们得到

$$d\left(\frac{dx^k}{d\tau}\right)=-\Gamma^k_{ij}\frac{dx^j}{d\tau}dx^i$$

以 $d\tau$ 除上式两边,便得到典型参数的测地线微分方程

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}=-\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}\qquad(5—132)$$

由于 $\Gamma^k_{ij}(x^1,\cdots,x^n)$ 的连续性。对于参数的任一组初值

$$(x^i)_{\tau=\tau_0}=c^i\qquad\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_0}=d^i\qquad(5—133)$$

式中 d^i 不同时为零。于是由微分方程解的存在定理可知，在 $\tau=\tau_0$ 某一邻域内，唯一存在着适合于式（5—132）及初始条件（5—133)的函数 $x^i(\tau)$ 。并且所得的解依赖于初始条件

$$x^i=x^i(\tau;c^1,\cdots,c^n;d^1,\cdots,d^n)$$

由微分方程理论可知，这些函数对所有自变量连续可微的次数是与 Γ^k_{ij} 一样的。

上述结果表明,总可以引一条而且是唯一的一条测地线,使它通过预先给定的一点 c^i,且在此点具有给定的切矢量 d^i 。

可以证明,在已知空间内联络对象 Γ^k_{ij} 与由它用对称法而得的联络对象

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij}=\frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij}+\Gamma^k_{ji})\qquad(5—134)$$

所决定的一切测地线是完全一样的。

先证 $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ 构成联络对象。为此,只要把式(5—119)、(5—123)两边对应相加再除以 2,得

$$\frac{1}{2}(\Gamma^{k'}_{i'j'}+\Gamma^{k'}_{j'i'})=\left(\frac{\partial^2x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)(\Gamma^k_{ij}+\Gamma^k_{ji})$$

再由式(5—134)得

$$\widetilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'}=\left(\frac{\partial^2x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$$

所得结果表明，$\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ 是联络对象。又因 $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ 关于指标对称。故为一无挠率联络。

现证，这两种联络所决定的测地线是共同的。事实上，对 $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ 的测地线方程为

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\widetilde{\Gamma}^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}$$

$$= -\frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ji}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}$$

把右边第二项的总和指标记号 i 与 j 对调，结果得

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}$$

这就是 Γ^k_{ij} 的测地线方程。

§5.11 黎曼空间

一 度规张量

我们知道，在三维欧氏空间中，直角坐标分别为 (x, y, z) 与 $(x+dx, y+dy, z+dz)$ 两点间的距离 ds，是由

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

来决定的。若取球坐标

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

时，ds^2 变为

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

若在三维欧氏空间中考虑由参数

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

给定的二维曲面，则对应于参数值分别为 (u, v) 与 $(u+du, v+dv)$ 的曲面上两点 (x, y, z) 与 $(x+dx, y+dy, z+dz)$ 之间的矩离 ds 是由

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

所决定。其中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

上述这些例子说明，非常接近两点间的距离 ds 的平方均为坐标的微分二次形式。一般，我们给出下面的定义

若 n 维空 R^n 中有一组函数

$$g_{ij}(x^1, \cdots, x^n) = g_{ji}(x^1, \cdots, x^n)$$

使得两邻点 $(x^1,\cdots,x^n)$ 与 $(x^1+dx^1,\cdots,x^n+dx^n)$ 之间的距离 ds 由一个正定二次型

$$ds^2 = g_{ij}(x^1, \cdots, x^n)dx^i dx^j \qquad (5\text{—}135)$$

来决定，则称空间 R^n 为黎曼(Riemann)空间，并记作 V^n。

因为 $g_{ij}dx^i dx^j$ 是正定二次型。故有

$$\mathrm{Det}|g_{ij}| \neq 0$$

而当坐标 x^i 变到新的坐标 $x^{i'}$ 上时，由于 ds^2 的不变性，可知

$$g_{i'j'}dx^{i'}dx^{j'} = g_{ij}dx^i dx^j$$

以

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}dx^{i'} \qquad dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}dx^{j'}$$

代入上式右边，得到关于变量 $dx^{1'},\cdots,dx^{n'}$ 的两个恒等的二次形式

$$g_{i'j'}dx^{i'}dx^{j'} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}dx^{i'}dx^{j'}$$

由此，并考虑到 $g_{ij}=g_{ji}$，$g_{i'j'}=g_{j'i'}$，得

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}g_{ij}$$

即 g_{ij} 形成一张量场。同时它是个二阶协变张量的分量。我们称它为协变度规张量或基本张量。又由于 $\mathrm{Det}|g_{ij}| \neq 0$，故如同在§5.6中所讨论的那样，可从

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$$

解出关于 j 与 k 对称的一个二阶逆变张量 g^{ik}，它称为逆变度规张量或基本张量。

利用度规张量 g_{ij} 与 g^{ik}，按如下方法，可从一个逆变矢量 a^i 作出其协变矢量 a_j。从一个协变矢量 a_j，作其逆变矢量 a^k。

$$a_j = a^i g_{ij} \qquad a^k = a_j g^{jk}$$

对于一般张量也可施行这种运算，例如

$$\mathbf{T}_{ij}^{\cdot\cdot k} = \mathbf{T}_{ijm}g^{mk} \qquad \mathbf{T}_{ijk} = \mathbf{T}_{ij}^{\cdot\cdot m}g_{mk}$$

这种运算，正如在§5.6中所详细讨论过的，它叫指标的“上升”和“下降”。对一个张量，用度规张量升标后再降标，或者降标后再升标，那末这个张量就恢复原状。例如

$$a^k = a^m\delta_m^k = a^m(g_{mj}g^{jk}) = (a^m g_{mj})g^{jk}$$

二　曲线与矢量的长度

设在 V^n 中的曲线由

$$x^i = x^i(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

给出，则对应于参数值 t 与 $t+dt$，曲线上两点 $x^i(t)$，$x^i(t)+(dx^i/dt)dt$ 间的距离 ds 由

$$ds = \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt$$

给出。故从参数 $t=t_1$ 到参数 $t=t_2$ 的曲线上两点间之弧长由积分

$$s = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt$$

给出。若取 s 为曲线的参数，便得到恒等式

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 1 \qquad (5—136)$$

由式(5—135)知，从点 x^k 到点 x^k+dx^k，分量为 dx^k 的逆变矢量的长为 ds。

与此相同，设一矢量 $\boldsymbol{a}$ 的逆变分量为 a^k，则由

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{g_{ij}a^i a^j} \qquad (5—137)$$

给定的不变量 $|\boldsymbol{a}|$，定义为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的长。而恒等式(5—136)表示曲线切线的逆变矢量 dx^k/ds 的长为1。

设某一矢量的逆变分量为 a^k，其协变分量 a_j 可由

$$a_j = a^m g_{mj}$$

给出。故矢量的长度公式(5—137)又可写成

$$|\boldsymbol{a}|^2 = a_j a^j$$

又因 $a^k = a_j g^{jk}$，故矢量的长度公式又可写为

$$|\boldsymbol{a}|^2 = g^{jk}a_j a_k$$

三　二矢量的夹角

在三维欧氏空间中取一直角坐标系。此时，方向余弦分别为 (l_1, m_1, n_1) 与 (l_2, m_2, n_2) 的两方向夹角 θ 可由

$$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

来决定，其中方向余弦分别满足

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \qquad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$

故都可看作单位矢量的分量。

又在三维欧氏空间中取一斜交坐标轴，设它们间的夹角分别为 α, β, γ；则方向系数分别为 (l_1, m_1, n_1) 与 (l_2, m_2, n_2) 两方向的夹

角 θ 可由

$$\cos\theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 + (m_1n_2 + m_2n_1)\cos\alpha$$
$$+ (n_1l_2 + n_2l_1)\cos\beta + (l_1m_2 + l_2m_1)\cos\gamma$$

给出，式中 (l_1, m_1, n_1) 与 (l_2, m_2, n_2) 分别满足

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 + 2m_1n_1\cos\alpha + 2n_1l_1\cos\beta + 2l_1m_1\cos\gamma = 1$$
$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 + 2m_2n_2\cos\alpha + 2n_2l_2\cos\beta$$
$$+ 2l_2m_2\cos\gamma = 1$$

故可看作单位矢量的分量。

参照上例，在 V^n 中我们用

$$\cos\theta = g_{ij}a^ib^j \tag{5—138}$$

来定义二单位矢量 a^k 与 b^k 的夹角是极其自然的。而且这是个不变量。但为了说明这个定义是有意义的，必须证明 $g_{ij}a^ib^j$ 的绝对值小于 1。为此，我们考虑矢量 $ta^k + b^k$ 的长。由关系式

$$g_{ij}b^ib^j = 1 \qquad g_{ij}a^ia^j = 1$$

得到

$$g_{ij}(ta^i + b^i)(ta^j + b^j) = t^2 + 2tg_{ij}a^ib^j + 1$$

然而，上式左边不论 t 取何值总不为负。故

$$t^2 + 2tg_{ij}a^ib^j + 1 \geqslant 0$$

的判别式为负或 0，即

$$(g_{ij}a^ib^j)^2 - 1 \leqslant 0$$

此式表明：$g_{ij}a^ib^j$ 的绝对值小于 1，由此证明了式(5—138)是有意义的。

若二矢量 a^k 与 b^k 不是单位矢量，此时，a^k 与 b^k 分别用其长度除，使其变为单位矢量

$$\frac{a^k}{\sqrt{g_{ij}a^ia^j}} \qquad \frac{b^k}{\sqrt{g_{ij}b^ib^j}}$$

然后再利用公式(5—137)，便得

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}a^ib^j}{\sqrt{g_{ij}a^ia^j}\sqrt{g_{ij}b^ib^j}} \tag{5—139}$$

这就是任意两矢量夹角的表达式。

式(5—139)又可改写为

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = g_{ij}a^ib^j$$

上式右边又可改写为

$$g_{ij}a^ib^j = a_jb^j = a^ib_i \tag{5—140}$$

我们把这个不变量叫做二矢量 a^k 与 b^k 的标量积。即二矢量的标

量积是这两个矢量的长度与其夹角余弦的乘积

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta \tag{5—141}$$

特别是由二矢量 a 与 b 正交的条件 $\theta = \frac{\pi}{2}$，得

$$g_{ij}a^i b^j = 0 \qquad a_j b^j = 0 \qquad a^i b_i = 0$$

四　体积元

在三维欧氏空间中，若取夹角分别为 α, β, γ 的斜交轴 x、y、z，则其体积元 dv 为

$$dv = \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} dxdydz$$

再考虑由参数表示

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

的二维曲面，它的面积元 $d\sigma$ 是

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} dudv$$

把这些推广到 V^n 中，我们定义

$$dv = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \cdots dx^n \tag{5—142}$$

为 V^n 中的体积元，其中 $g = \mathrm{Det}|g_{ij}|$。因为体积元是纯几何量，所以必须证明由式(5—142)定义的量与坐标系的取法无关。即它为一个不变量。从微积分学中知道，在坐标变换

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \cdots, x^n)$$

下，$dx^1 dx^2 \cdots dx^n$ 这个量的变换式是

$$dx^{1'} dx^{2'} \cdots dx^{n'} = \mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right| dx^1 \cdots dx^n \tag{5—143}$$

按张量的变换规律

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}$$

由此，类似于式(5—73)得

$$\mathrm{Det}|g_{i'j'}| = \left(\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|\right)^2 \mathrm{Det}|g_{ij}|$$

故 g 的变换式是

$$g' = \left(\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|\right)^2 g$$

又因

$$\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\right|>0$$

故其平方根 $\sqrt{g}$ 的变换式为

$$\sqrt{g'}=\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\right|\sqrt{g} \qquad (5\text{—}144)$$

式(5—143)、(5—144)两边对应相乘，并注意到

$$\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right|\cdot\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\right|=1$$

便得

$$\sqrt{g'}\,dx^{1'}dx^{2'}\cdots dx^{n'}=\sqrt{g}\,dx^{1}dx^{2}\cdots dx^{n}$$

这就表明式(5—142)为不变量。

五　仿射联络与克氏符号的性质

在黎曼空间中，总可以用唯一的方式作出具有下列性质的联络 $\Gamma^{k}_{ij}(M)$

(1)挠率为零

$$\Gamma^{k}_{ij}=\Gamma^{k}_{ji}$$

(2)当两个矢量 a、b 沿任一路径同时平行移动时，它们的标量积不变。

现在我们来求出满足上述条件的联络 Γ^{k}_{ij}。根据式(5—140)，矢量 a、b 的标量积可写成

$$a\cdot b=g_{ij}a^{i}b^{j}$$

的形状。当沿任何路径平行移动时，$a\cdot b$ 为常量的条件可以写成其微分为零的形式

$$d(a\cdot b)=d(g_{ij}a^{i}b^{j})=0 \qquad (5\text{—}145)$$

或者

$$(dg_{ij})a^{i}b^{j}+g_{ij}(da^{i})b^{j}+g_{ij}a^{i}db^{j}=0 \qquad (5\text{—}146)$$

因矢量 a、b 是平行移动的，故有

$$da^{k}=-\Gamma^{k}_{pi}a^{i}dx^{p} \qquad db^{k}=-\Gamma^{k}_{pj}b^{j}dx^{p}$$

式中 Γ^{k}_{ij} 是所求的联络系数，而 dx^{p} 是沿路径作无限小位移时坐标的微分。

此外

$$dg_{ij}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{p}}dx^{p}$$

把所有这些代入式(5—146)中，且预先将这个等式中总和指标的记号改变如下：在第二项中把 i 改作 k，在第三项中，把 j 改作 k。

我们便得到

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}-g_{kj}\Gamma^k_{pi}-g_{ik}\Gamma^k_{pi}\right)a^ib^jdx^p=0$$

因为 a^i,b^j,dx^p 可以由我们任意选取，故等式关于 a^i,b^j,dx^p 应该是恒等的。因而这些量的所有系数都应为零，即

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}-g_{kj}\Gamma^k_{pi}-g_{ik}\Gamma^k_{pj}=0 \qquad (5\text{—}147)$$

所求的 Γ^k_{ij} 必须由式(5—147)及条件(1)决定。显然，从关系式(5—147)可用逆运算而回到式(5—145)。所以这些关系式对条件(2)的满足不仅是必要的，而且也是充分的。

类似于式(5—113)，我们记

$$\Gamma_{l,ij}=g_{lk}\Gamma^k_{ij}$$

显然，反过来由 $\Gamma_{l,ij}$ 用指标上升法，可以表示 Γ^k_{ij}：

$$\Gamma^k_{ij}=g^{kl}\Gamma_{l,ij} \qquad (5\text{—}148)$$

这时，由条件(1)知，$\Gamma_{l,ij}$ 是关于指标 i,j 对称的。

于是方程(5—147)可改写为

$$\Gamma_{j,pi}+\Gamma_{i,pj}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}$$

但是，这些方程的形式完全与式(5—116)相同。并可用同样的方法解出。我们得到类似于式(5—117)的表达式

$$\Gamma_{l,mk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}\right) \qquad (5\text{—}149)$$

又根据式(5—148)，有

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) \qquad (5\text{—}150)$$

上式便给出了所提出问题的解答。而且这个解是唯一的。

以前所得到的公式(5—118)，从外表上看完全和公式(5—150)一样，但必须看作是后者的特殊情形。而现在所得的 $\Gamma_{l,mk}$ 及 Γ^k_{ij}，同样称为第一类及第二类克里斯托弗尔三指标记号，并简称克氏记号。

现考察克氏记号在坐标变换

$$x^{k'}=x^{k'}(x^1,\cdots,x^n)$$

下的变化规律。

先将 g_{qk} 的变换式

$$g_{q'l'}=\frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}g_{ql}$$

对 $x^{j'}$ 求偏导数，得

$$\frac{\partial g_{q'l'}}{\partial x^{j'}}=\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}}\frac{\partial g_{ql}}{\partial x^j}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}+\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{q'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}g_{kl}+\frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{l'}}g_{qk} \tag{5—151}$$

同理，$g_{j'l'}$ 与 $g_{j'q'}$ 分别对 $x^{q'}$ 与 $x^{l'}$ 求偏导得

$$\frac{\partial g_{j'l'}}{\partial x^{q'}}=\frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^q}+\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{q'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}g_{kl}+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{q'}\partial x^{l'}}g_{jk} \tag{5—152}$$

$$\frac{\partial g_{j'q'}}{\partial x^{l'}}=\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}}\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^l}+\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{l'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}}g_{kq}+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{l'}\partial x^{q'}}g_{jk} \tag{5—153}$$

将式(5—151)、(5—152)相加，并减去式(5—153)，最后除以 2，得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{q'l'}}{\partial x^{j'}}+\frac{\partial g_{j'l'}}{\partial x^{q'}}-\frac{\partial g_{j'q'}}{\partial x^{l'}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\left(\frac{\partial g_{ql}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^l}\right)+\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{q'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}g_{kl}$$

上式又可写作

$$\Gamma_{l',j'q'}=\Gamma_{l,jq}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\right)+\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{q'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}g_{kl} \tag{5—154}$$

此式两边乘以

$$g^{s'l'}=\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^s}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^t}g^{st}$$

对 l' 从 1 加到 n 求总和得

$$\Gamma^{s'}_{j'q'}=\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^s}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}}\Gamma^s_{jq}+\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{j'}\partial x^{q'}}\right) \tag{5—155}$$

式(5—154)、(5—155)就是所求的克氏记号变换式。但一般

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{j'}\partial x^{q'}}\neq 0$$

故 Γ^s_{jq} 不是张量的分量。式(5—155)又可写作

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{j'}\partial x^{q'}}=\frac{\partial x^s}{\partial x^{s'}}\Gamma^{s'}_{j'q'}-\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}}\Gamma^s_{jq} \tag{5—156}$$

这是一个非常有用的公式。

最后我们导出克氏记号所满足的几个重要恒等式。由定义式

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kp}\left(\frac{\partial g_{jp}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}\right) \tag{5—157}$$

得

$$\Gamma^k_{ij}g_{kq}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{iq}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q}\right)\tag{5—158}$$

同理可得

$$\Gamma^k_{iq}g_{jk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{qj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{iq}}{\partial x^j}\right)\tag{5—159}$$

将式(5—158)、(5—159)两边对应相加，得

$$\Gamma^k_{ij}g_{kq}+\Gamma^k_{iq}g_{jk}=\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^i}\tag{5—160}$$

再对 x^i 求恒等式

$$g^{qk}g_{km}=\delta^q_m$$

的偏导数，得

$$\frac{\partial g^{qk}}{\partial x^i}g_{km}+g^{qk}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i}=0\tag{5—161}$$

由式(5—160)得到的

$$\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i}\doteq g_{pm}\Gamma^p_{ik}+g_{kp}\Gamma^p_{im}\tag{5—162}$$

代入式(5—161)中的第二项，则有

$$\frac{\partial g^{qk}}{\partial x^i}g_{km}+g^{qk}(g_{pm}\Gamma^p_{ik}+g_{kp}\Gamma^p_{im})=0\tag{5—163}$$

上式又可写为

$$\frac{\partial g^{qk}}{\partial x^i}g_{km}+g^{qk}g_{pm}\Gamma^p_{ik}+\Gamma^q_{im}=0\tag{5—164}$$

上式两边乘以 g^{mt} 并关于 m 求总和，则得另一恒等式

$$\frac{\partial g^{qt}}{\partial x^i}+\Gamma^q_{ik}g^{kt}+\Gamma^t_{ik}g^{qk}=0\tag{5—165}$$

在 Γ^t_{jp} 中令 $t=q$，并从 1 到 n 求总和，得 Γ^q_{jq}，由定义式 (5—157)知

$$\begin{aligned}\Gamma^q_{jq}&=\frac{1}{2}g^{qk}\left(\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k}\right)\\&=\frac{1}{2}g^{qk}\frac{\partial q_{qk}}{\partial x^j}\end{aligned}\tag{5—166}$$

设 $g=\mathrm{Det}\,|g_{ij}|$，且 G^{ij} 是 g_{ij} 的余因式，则有

$$g=g_{ik}G^{ik}\qquad (i\text{固定对}k\text{求和})$$

上式两边对 g_{ij} 求偏导数，得

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}=g_{ik}\frac{\partial G^{ik}}{\partial g_{ij}}+G^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial g_{ij}}\tag{5—167}$$

因 G^{ik} 不包含 g_{ij}，故

$$\frac{\partial G^{ik}}{\partial g_{ij}}=0$$

又因

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial g_{ij}}=\delta_k^j$$

于是式(5—167)可写成

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}=G^{ik}\delta_k^j=G^{ij}$$

故有

$$\frac{\partial g}{\partial x^j}=\frac{\partial g}{\partial g_{qk}}\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^j}=G^{qk}\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^j}$$

注意到

$$g^{qk}=\frac{G^{qk}}{g}$$

式(5—166)便可写作

$$\Gamma_{jq}^q=\frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^j}=\frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial x^j} \tag{5—168}$$

这也是一个常用的恒等式。

六 测地线方程

在三维欧氏空间中，两点之间的最短距离是直线，我们把这个基本概念推广到黎曼空间中。

如果曲线 $x^i=x^i(t)$ 连接两个固定点 $P_1(t_1)$ 与 $P_2(t_2)$，则这两点间沿此曲线的距离为

$$S=\int_{P_1}^{P_2}dS=\int_{t_1}^{t_2}[F(x^1,\cdots,x^n;\dot{x}^1,\cdots,\dot{x}^n;t)]^{\frac{1}{2}}dt \tag{5—169}$$

其中

$$F=g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\qquad \dot{x}^k=\frac{dx^k}{dt}$$

由于这个距离是与坐标系无关的。所以，在 P_1 与 P_2 之间画出的，使式(5—169)取极值(最小)的曲线也是与坐标系无关的；这条曲线称为测地线。现导出在 V^n 中的测地线方程。

注意到

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{F}\,dt=0$$

利用变分法中对泛函极值导出的结果，可以写出

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F^{1/2}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^{1/2}}{\partial \dot{x}^i}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2F^{1/2}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right] - \frac{1}{2F^{1/2}}\frac{\partial F}{\partial x^i} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{F^{1/2}}\right)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} + \frac{1}{F^{1/2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{1}{F^{1/2}}\frac{\partial F}{\partial x^i} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{1}{2F}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\frac{dF}{dt}
\end{aligned}
\tag{5—170}
$$

因 t 是一个任意的参量，故可取 t 等于沿该曲线的距离 S，而 $dF/dS = 0$，在这种情况下，我们有

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dS}$$

$$F = g_{ij}\frac{dx^i}{dS}\frac{dx^j}{dS}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = 2g_{ij}\dot{x}^j$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \dot{x}^m\dot{x}^h\frac{\partial g_{mh}}{\partial x^i}$$

方程(5—170)变为

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dS}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} \\
&= \frac{d}{dS}(2g_{ij}\dot{x}^j) - \dot{x}^m\dot{x}^h\frac{\partial g_{mh}}{\partial x^i} \\
&= g_{ij}\frac{d^2x^j}{dS^2} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dS}\frac{dx^j}{dS} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{mh}}{\partial x^i}\frac{dx^m}{dS}\frac{dx^h}{dS}
\end{aligned}
$$

利用第一类克氏记号，并注意到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dS}\frac{dx^j}{dS} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^h}\frac{dx^h}{dS}\frac{dx^m}{dS} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^m}\frac{dx^m}{dS}\right)$$

上述方程可写成如下形式：

$$
\begin{aligned}
0 &= g_{ij}\frac{d^2x^j}{dS^2} + \Gamma_{i,mh}\frac{dx^m}{dS}\frac{dx^h}{dS} \\
&= g^{ik}g_{ij}\frac{d^2x^j}{dS^2} + g^{ik}\Gamma_{i,mh}\frac{dx^m}{dS}\frac{dx^h}{dS}
\end{aligned}
$$

又因

$$g^{ik}g_{ij} = \delta^k_j \qquad \Gamma^k_{mh} = g^{ik}\Gamma_{i,mh}$$

故上式最后可写成

$$\frac{d^2x^k}{dS^2}+\Gamma^k_{mh}\frac{dx^m}{dS}\frac{dx^h}{dS}=0 \qquad (5—171)$$

这就是 V^n 中的测地线方程。

例 5　求三维笛卡尔坐标系的测地线方程。

解：　对于三维欧氏空间中笛卡尔坐标系有

$$g_{mh}=\begin{cases}1 & (m=h)\\ 0 & (m\neq h)\end{cases}$$

$$\Gamma^k_{mh}=0$$

此时式(5—171)变为

$$\frac{d^2x^k}{dS^2}=0 \qquad (k=1,2,3)$$

我们得到

$$x^k=AS+B$$

其中 A、B 是任意常数。上述方程就是所求的测地线方程；这是一条直线方程。

§5.12　绝对微分法

一　张量的绝对微分

我们考察不变量

$$\overline{\varphi}(x^{1'},\cdots,x^{n'})=\varphi(x^1,\cdots,x^n)$$

上式两边对 $x^{i'}$ 求导，我们得到

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \qquad (5—172)$$

我们看 $\partial\varphi/\partial x^j$ 是个一阶协变张量的分量。它叫做不变量 φ 的绝对导数。并用

$$\nabla_i\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \qquad (5—173)$$

表示。若考虑不变量 φ 在 dx^i 方向上的微分，则得

$$d\varphi=dx^i\nabla_i\varphi$$

这个不变量叫做 φ 在 dx^i 方向上的绝对微分。并用

$$\mathrm{D}\varphi=d\varphi$$

表示。

式(5—172)使我们能从一个零阶张量得到一个一阶张量。如果我们企图推广这种方法，通过对一个一阶张量求导，来得到一个二阶张量，这将会遇到困难。例如，给定一个协变矢量 a_i，它的变

换关系式为

$$a_{i'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}a_i \tag{5—174}$$

对坐标 $x^{j'}$ 求上式的偏导数，得

$$\frac{\partial a_{i'}}{\partial x^{j'}}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial a_i}{\partial x^j}+\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{i'}}a_i \tag{5—175}$$

由于上式右边第二项一般不为零。故 $\partial a_i/\partial x^j$ 并不构成张量的分量。

为使张量求导后仍得到一个张量，我们在等式（5—175）中引入克里斯托弗尔符号 Γ^k_{ji} 的变换式(5—156)，并将式(5—175)右边第二项的 i 指标换成 k 指标，便有

$$\frac{\partial a_{i'}}{\partial x^{j'}}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial a_i}{\partial x^j}+\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}a_k\Gamma^{k'}_{j'i'}-\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}a_k\Gamma^k_{ji}$$

再由

$$a_{k'}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}a_k$$

上式可改写为

$$\frac{\partial a_{i'}}{\partial x^{j'}}-\Gamma^{k'}_{j'i'}a_{k'}=\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j}-\Gamma^k_{ji}a_k\right) \tag{5—176}$$

引入记号

$$\nabla_j a_i=\frac{\partial a_i}{\partial x^j}-\Gamma^k_{ji}a_k \tag{5—177}$$

等式(5—176)变为

$$\nabla_{j'}a_{i'}=\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\nabla_j a_i \tag{5—178}$$

上式与张量分量有相同的变换规律。因此，$\nabla_j a_i$ 是一个二阶协变张量的分量。它叫矢量 a_i 的绝对导数。

这个绝对导数乘以 dx^j，缩并，叫做 dx^j 方向上的绝对微分，并记作

$$\mathrm{D}a_i=da_i-\Gamma^k_{ji}a_k dx^j \tag{5—179}$$

它和 a_i 一样，是协变矢量。有时我们又把绝对微分叫做协变微分，而绝对导数，又叫做协变导数。

同理，对逆变矢量 a^i 也可定义绝对导数，因为

$$a^k=\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}a^{k'}$$

上式对坐标 $x^{j'}$ 求偏导得

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial a^k}{\partial x^j}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial a^{k'}}{\partial x^{j'}}+\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}a^{k'} \tag{5—180}$$

在上式右边第二项的指标 k' 用 m' 代之，并将 Γ^k_{jm} 的变换式（5—156）

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{m'}}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^{k'}_{j'm'}-\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\Gamma^k_{jm}$$

代入得

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial a^k}{\partial x^j}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial a^{k'}}{\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^{k'}_{j'm'}a^{m'}-\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\Gamma^k_{jm}a^{m'}$$

即

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial a^{k'}}{\partial x^{j'}}+\Gamma^{k'}_{j'm'}a^{m'}\right)=\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x^j}+\Gamma^k_{jm}a^m\right)$$

上式又可改写为

$$\frac{\partial a^{k'}}{\partial x^{j'}}+\Gamma^{k'}_{j'm'}a^{m'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x^j}+\Gamma^k_{jm}a^m\right) \tag{5—181}$$

引入记号 ∇_j，使

$$\nabla_j a^k=\frac{\partial a^k}{\partial x^j}+\Gamma^k_{jm}a^m$$

于是式(5—181)变为

$$\nabla_{j'}a^{k'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(\nabla_j a^k) \tag{5—182}$$

上式与张量分量的变换规律一样。因此，$\nabla_j a^k$ 是个二阶混合张量的分量。它叫做逆变矢量 a^k 的绝对导数。

此绝对导数乘以 dx^j 关于 j 缩并，称为在 dx^j 方向上的绝对微分，并记为

$$\mathrm{D}a^k=da^k+\Gamma^k_{jm}dx^ja^m \tag{5—183}$$

它是一个逆变矢量。

用同样的方法，可定义任何张量的绝对导数导和绝对微分。现以三阶混合张量 $\mathbf{T}^k_{ji}$ 为例说明之。

当坐标系变换时，$\mathbf{T}^k_{ji}$ 的变换式是

$$\mathbf{T}^{k'}_{j'i'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\mathbf{T}^k_{ji}$$

上式又可改写为

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\mathbf{T}^{k'}_{j'i'}=\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\mathbf{T}^k_{ji}$$

上式对 $x^{m'}$ 求偏导数，得

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial \mathbf{T}^{k'}_{j'i'}}{\partial x^{m'}}+\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'}\partial x^{k'}}\mathbf{T}^{k'}_{j'i'}=\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial \mathbf{T}^k_{ji}}{\partial x^m}$$

$$+\frac{\partial^2 x^h}{\partial x^{m'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\mathbf{T}^k_{hi}+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial^2 x^h}{\partial x^{m'}\partial x^{i'}}T^k_{jh}$$

将 Γ^k_{mh} 的变换式

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'}\partial x^{h'}}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^{k'}_{m'h'}-\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}}\Gamma^k_{mh}$$

代入上式得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial \mathbf{T}^{k'}_{j'i'}}{\partial x^{m'}}+\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^{k'}_{m'h'}\mathbf{T}^{h'}_{j'i'}-\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}}\Gamma^k_{mh}\mathbf{T}^{h'}_{j'i'}\\
&=\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial \mathbf{T}^k_{ji}}{\partial x^m}+\frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\Gamma^{h'}_{m'j'}\mathbf{T}^k_{hi}\\
&-\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\Gamma^h_{mj}\mathbf{T}^k_{hi}+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}}\Gamma^{h'}_{m'i'}T^k_{jh}\\
&-\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\Gamma^h_{mi}\mathbf{T}^k_{jh}
\end{aligned}\tag{5—184}$$

上面等式两边同乘以 $\partial x^{k'}/\partial x^k$，并注意到

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}=\delta^{k'}_{k'}=1\qquad \mathbf{T}^{k'}_{h'i'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\mathbf{T}^k_{hi}$$

则式(5—184)可写成

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{T}^{k'}_{j'i'}}{\partial x^{m'}}+\Gamma^{k'}_{m'h'}\mathbf{T}^{h'}_{j'i'}-\Gamma^{h'}_{m'j'}\mathbf{T}^{k'}_{h'i'}-\Gamma^{h'}_{m'i'}\mathbf{T}^{k'}_{j'h'}\\
&=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial \mathbf{T}^k_{ji}}{\partial x^m}+\Gamma^k_{mh}\mathbf{T}^h_{ji}-\Gamma^h_{mj}\mathbf{T}^k_{hi}-\Gamma^h_{mi}\mathbf{T}^k_{jh}\right)
\end{aligned}$$

这表明

$$\frac{\partial \mathbf{T}^k_{ji}}{\partial x^m}+\Gamma^k_{mh}\mathbf{T}^h_{ji}-\Gamma^h_{mj}\mathbf{T}^k_{hi}-\Gamma^h_{mi}\mathbf{T}^k_{jh}$$

是一个四阶混合张量的分量。它叫做张量 $\mathbf{T}^k_{ji}$ 的绝对(协变)导数，并记作

$$\nabla_m\mathbf{T}^k_{ji}=\frac{\partial \mathbf{T}^k_{ji}}{\partial x^m}+\mathbf{T}^h_{ji}\Gamma^k_{mh}-\mathbf{T}^k_{hi}\Gamma^h_{mj}-\mathbf{T}^k_{jh}\Gamma^h_{mi}\tag{5—185}$$

由此，一般张量绝对(协变)导数的表达式，可写作

$$\begin{aligned}
\nabla_j\mathbf{T}^{k_1k_2\cdots k_r}_{i_1i_2\cdots i_s}=&\frac{\partial \mathbf{T}^{k_1k_2\cdots k_r}_{i_1i_2\cdots i_s}}{\partial x^j}+\sum_{t=1}^{r}\mathbf{T}^{k_1\cdots k_{t-1}pk_{t+1}\cdots k_r}_{i_1i_2\cdots i_s}\Gamma^{k_t}_{jp}\\
&-\sum_{q=1}^{s}\mathbf{T}^{k_1\cdots k_r}_{i_1\cdots i_{q-1}pi_{q+1}\cdots i_s}\Gamma^p_{ji_q}
\end{aligned}\tag{5—186}$$

此时，在 dx^j 方向上的绝对(协变)微分的定义式为

$$\mathrm{D}\mathbf{T}^{k_1\cdots k_r}_{i_1\cdots i_s}=d\mathbf{T}^{k_1\cdots k_r}_{i_1\cdots i_s}+\sum_{t=1}^{r}\mathbf{T}^{k_1\cdots k_{t-1}pk_{t+1}\cdots k_r}_{i_1\cdots i_s}\Gamma^{k_t}_{jp}dx^j$$

$$-\sum_{q=1}^{s}\mathbf{T}_{i_1\cdots i_{q-1}pi_{q+1}\cdots i_s}^{k_1\cdots k_r}\Gamma_{ji_q}^{p}dx^j \tag{5—187}$$

若

$$\mathbf{DT}_{i_1\cdots i_s}^{k_1\cdots k_r}=0$$

即

$$d\mathbf{T}_{i_1\cdots i_s}^{k_1\cdots k_r}=-\Big(\sum_{t=1}^{r}\mathbf{T}_{i_1\cdots i_s}^{k_1\cdots k_{t-1}pk_{t+1}\cdots k_r}\Gamma_{jp}^{k_t}dx^j$$
$$-\sum_{q=1}^{s}T_{i_1\cdots i_{q-1}pi_{q+1}\cdots i_s}^{k_1\cdots k_r}\Gamma_{ji_q}^{p}dx^j\Big) \tag{5—188}$$

此时，称张量 $\mathbf{T}_{i_1\cdots i_s}^{k_1\cdots k_r}$ 沿任意路径平行移动。

最后，我们考察度规张量 g_{ji}、g^{ji} 和单位张量 δ_j^i 的绝对（协变）微分。

对于 g_{ji}，应用公式(5—186)、(5—187)，有

$$\nabla_m g_{ji}=\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^m}-g_{pi}\Gamma_{mj}^{p}-g_{jp}\Gamma_{mi}^{p}$$

$$\mathbf{D}g_{ji}=\Big(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^m}-g_{pi}\Gamma_{mj}^{p}-g_{jp}\Gamma_{mi}^{p}\Big)dx^m$$

由恒等式(5—162)知：

$$\nabla_m g_{ji}=0\qquad \mathbf{D}g_{ji}=0$$

同理，对 g^{ik}，我们有

$$\nabla_m g^{ik}=\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m}+g^{pk}\Gamma_{mp}^{i}+g^{ip}\Gamma_{mp}^{k}$$

$$\mathbf{D}g^{ik}=\Big(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m}+g^{pk}\Gamma_{mp}^{i}+g^{ip}\Gamma_{mp}^{k}\Big)dx^m$$

由式(5—165)知：

$$\nabla_m g^{ik}=0\qquad \mathbf{D}g^{ik}=0$$

又因

$$g_j^k=g_{ji}g^{ik}=\delta_j^k$$

应用公式(5—186)、(5—187)，我们有

$$\nabla_m g_j^k=\frac{\partial g_j^k}{\partial x^m}+g_j^p\Gamma_{mp}^{k}-g_p^k\Gamma_{mj}^{p}$$
$$=\Gamma_{mj}^{k}-\Gamma_{mj}^{k}=0$$
$$\mathbf{D}g_j^k=0$$

由此可见，度规张量和单位张量有如常数一样，它们的绝对（协变）导数和微分均为零。

对于一般张量的逆变导数，可由下面公式定义

$$\nabla^m T^{k_1\cdots k_r}_{i_1\cdots i_s} = g^{ml}(\nabla_l T^{k_1\cdots k_r}_{i_1\cdots i_s})$$

因此，要求张量的逆变导数，必须先作此张量的协变导数，然后再将作微分运算的指标 l 上移。

二　绝对微分运算法则

为了更有效地使用绝对微分法的运算，我们必须给出一些法则。按照这些法则，可以求张量之和、积以及缩并的绝对微分。

设张量 $\mathbf{W}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s}$ 是两个或更多个同类张量之和

$$\mathbf{W}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} = \mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} + \mathbf{V}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s}$$

由张量绝对微分公式(5—187)，有

$$\mathbf{D}\mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} = d\mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} + \{\Gamma^{i_1}_{kp}\mathbf{U}^{pi_2\cdots i_m}_{j_1 j_2\cdots j_s} + \cdots - \Gamma^{p}_{kj_1}\mathbf{U}^{i_1 i_2\cdots i_m}_{p j_2\cdots j_s} - \cdots\}dx^k$$

$$\mathbf{D}\mathbf{V}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} = d\mathbf{V}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} + \{\Gamma^{i_1}_{kp}\mathbf{V}^{pi_2\cdots i_m}_{j_1 j_2\cdots j_s} + \cdots - \Gamma^{p}_{kj_1}\mathbf{V}^{i_1 i_2\cdots i_m}_{p j_2\cdots j_s} - \cdots\}dx^k$$

把上面两式相加，然后把右边对应的项相合并，注意到

$$d\mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} + d\mathbf{V}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} = d\mathbf{W}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s}$$

我们得到

$$\mathbf{D}\mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} + \mathbf{D}\mathbf{V}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} = \mathbf{D}\mathbf{W}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s}$$

由上式不难得到

$$\nabla_l \mathbf{W}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} = \nabla_l \mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} + \nabla_l \mathbf{V}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s}$$

即张量和的绝对导数(微分)等于绝对导数(微分)之和。

现设

$$\mathbf{W}^{i_1\cdots i_m l_1\cdots l_z}_{j_1\cdots j_s r_1\cdots r_y} = \mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s}\mathbf{V}^{l_1\cdots l_z}_{r_1\cdots r_y}$$

由式(5—187)写出上式左边的绝对微分

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\mathbf{W}^{i_1\cdots i_m l_1\cdots l_z}_{j_1\cdots j_s r_1\cdots r_y} &= d\mathbf{W}^{i_1\cdots l_z}_{j_1\cdots r_y} + (\Gamma^{i_1}_{kp}\mathbf{W}^{pi_2\cdots l_z}_{j_1 j_2\cdots r_y} \\ &+ \cdots - \Gamma^{p}_{kj_1}\mathbf{W}^{i_1 i_2\cdots l_z}_{p j_2\cdots r_y} - \cdots)dx^k + (\Gamma^{l_1}_{kp}\mathbf{W}^{i_1\cdots i_m p l_2\cdots l_z}_{j_1\cdots j_s r_1 r_2\cdots r_y} \\ &+ \cdots - \Gamma^{p}_{kr_1}\mathbf{W}^{i_1\cdots i_m l_1 l_2\cdots l_z}_{j_1\cdots j_s p r_2\cdots r_y} - \cdots)dx^k\end{aligned} \qquad (5—189)$$

上面等式右边第一项可写成

$$d\mathbf{W}^{i_1\cdots l_z}_{j_1\cdots r_y} = (d\mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s})\mathbf{V}^{l_1\cdots l_z}_{r_1\cdots r_y} + \mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s} d\mathbf{V}^{l_1\cdots l_z}_{r_1\cdots r_y}$$

式(5—189)右边第一个括弧中各项都是依次对指标 $i_1,\cdots,i_m,j_1,\cdots,j_s$ 组成的，而指标 $l_1,\cdots,l_z,r_1,\cdots,r_y$ 在所有情况下都是按原来抄写下来。同样，在第二个括弧中的各项是依次对 $l_1,\cdots,l_z,r_1,\cdots,r_y$ 组成，而 $i_1,\cdots,i_m,j_1,\cdots,j_s$ 都是按原来抄写下来。我们

以 U 及 V 的积代替 W，并分别把公共因子 $\mathbf{V}^{l_1\cdots l_x}_{r_1\cdots r_y}$ 和 $\mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s}$ 拿到括弧外，便得到

$$\mathbf{DW}^{i_1\cdots l_x}_{j_1\cdots r_y} = (\mathbf{DU}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s})\mathbf{V}^{l_1\cdots l_x}_{r_1\cdots r_y} + \mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s}\mathbf{DV}^{l_1\cdots l_x}_{r_1\cdots r_y}$$

由上式不难得到

$$\nabla_t\mathbf{W}^{i_1\cdots l_x}_{j_1\cdots r_y} = (\nabla_t\mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s})\mathbf{V}^{l_1\cdots l_x}_{r_1\cdots r_y} + \mathbf{U}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_s}\nabla_t\mathbf{V}^{l_1\cdots l_x}_{r_1\cdots r_y}$$

故张量积的绝对微分（导数）可按通常的法则得到，即第一个因子的绝对微分（导数）乘上第二个因子，加上第一个因子乘第二个因子的绝对微分（导数）。此法则不难推广到多个张量乘积的情况中。

现考察缩并后的张量绝对微分。例如 $\mathbf{T}^{k_1\cdots k_r}_{i_1\cdots i_s}$，它关于第一个上指标及第一个下指标缩并

$$\mathbf{T}^{k_2\cdots k_r}_{i_2\cdots i_s} = \mathbf{T}^{lk_2\cdots k_r}_{li_2\cdots i_s}$$

缩并后，张量的绝对微分记作

$$\mathbf{DT}^{lk_2\cdots k_r}_{li_2\cdots i_s} \tag{5—190}$$

但实质上这个记号是不明确的，因为记号本身没有明确指出，先缩并后取绝对微分，或是先取绝对微分

$$\mathbf{DT}^{k_1\cdots k_r}_{i_1\cdots i_s}$$

然后再按 k_1, i_1 作缩并。然而，我们可以证明，缩并运算与绝对微分法运算是可交换的。事实上，我们可先按第二种意义计算式（5—190），此时应在公式(5—187)中令 $i_1 = k_1 = l$，再关于 l 作总和。右边对应于指标 i_1 及 k_1 的这些项

$$(\Gamma^{k_1}_{jp}\mathbf{T}^{pk_2\cdots k_r}_{i_1i_2\cdots i_s} - \Gamma^{p}_{ji_1}\mathbf{T}^{k_1k_2\cdots k_r}_{pi_2\cdots i_s})dx^j$$

相互消去，结果有

$$\begin{aligned}\mathbf{DT}^{lk_2\cdots k_r}_{li_2\cdots i_s} = d\mathbf{T}^{lk_2\cdots k_r}_{li_2\cdots i_s} + \{&\Gamma^{k_2}_{jp}\mathbf{T}^{lp\cdots k_r}_{li_2\cdots i_s} + \cdots \\ &+ \Gamma^{k_r}_{kp}\mathbf{T}^{lk_2\cdots p}_{li_2\cdots i_s} - \Gamma^{p}_{ji_2}\mathbf{T}^{lk_2\cdots k_r}_{lp\cdots i_s} - \cdots - \Gamma^{p}_{ji_s}\mathbf{T}^{lk_2\cdots k_r}_{li_2\cdots p}\}dx^j\end{aligned}$$

上式左边是先取绝对微分，后作缩并。但右边恰好是缩并后的张量 $\mathbf{T}^{lk_2\cdots k_r}_{li_2\cdots i_s}$ 的绝对微分。故上式又可改写为

$$\mathbf{DT}^{lk_2\cdots k_r}_{li_2\cdots i_s} = \mathbf{D}(\mathbf{T}^{lk_2\cdots k_r}_{li_2\cdots i_s})$$

这就是要证明的结论。

最后利用绝对微分法验证下面几个性质。

(1)指标的下降和上升的运算与绝对微分的运算是可交换的。

事实上，设有两个张量，例如 $\mathbf{T}^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs}$ 与 $\mathbf{T}^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s}$ 前一个是从后一个

下降 r 而得，后一个是由前一个上升 r 而得，即

$$\mathrm{T}^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs} = g_{rp}\mathrm{T}^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s} \qquad \mathrm{T}^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s} = g^{rp}\mathrm{T}^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}$$

逐项取绝对微分，得

$$\mathrm{DT}^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs} = (\mathrm{D}g_{rp})\mathrm{T}^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s} + g_{rp}\mathrm{DT}^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s}$$

$$\mathrm{DT}^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s} = (\mathrm{D}g^{rp})\mathrm{T}^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps} + g^{rp}\mathrm{DT}^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}$$

因为 $\mathrm{D}g_{rp} = \mathrm{D}g^{rp} = 0$，故有

$$\mathrm{DT}^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs} = g_{rp}\mathrm{DT}^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s}$$

$$\mathrm{DT}^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s} = g^{rp}\mathrm{DT}^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}$$

(2) 沿已知路径同时平行移动的两个矢量 a^i, b^j 时，它们的标量积 $g_{ij}a^ib^j$ 不变。

事实上，我们有

$$\mathrm{D}(g_{ij}a^ib^j) = (\mathrm{D}g_{ij})a^ib^j + g_{ij}(\mathrm{D}a^i)b^j + g_{ij}a^i(\mathrm{D}b^j) = 0$$

这是因为 $\mathrm{D}g_{ij}$ 总为零，而 $\mathrm{D}a^i, \mathrm{D}b^j$ 是由于平行移动而它们必为零。而不变量的绝对微分是与通常的微分相同。故得

$$d(g_{ij}a^ib^j) = 0 \qquad g_{ij}a^ib^j = \text{常数}$$

(3) 当几个张量同时平行移动时，由它们利用张量代数运算而得的张量也是平行移动的。

实际上，设

$$W^{ijk}_{rs} = U^{ij}_{r}V^{k}_{s}$$

此时，张量 U^{ij}_{r} 与 V^{k}_{s} 是沿已知路径平行移动的，这就表示

$$\mathrm{D}U^{ij}_{r} = 0 \qquad \mathrm{D}V^{k}_{s} = 0$$

由此得

$$\mathrm{D}(U^{ij}_{r}V^{k}_{s}) = (\mathrm{D}U^{ij}_{r})V^{k}_{s} + U^{ij}_{r}\mathrm{D}V^{k}_{s} = 0$$

故张量之积也是平行移动的。

同理不难验证，平行移动的张量之和是平行移动的。由平行移动的张量利用缩并而得的张量也是平行移动的。

三　梯度、旋度、散度

现考察普通矢量分析中标量的梯度，矢量的旋度，矢量的散度，它们在绝对微分法中是如何表示的。

对应于每一个标量场

$$\varphi = \varphi(M)$$

有一个梯度矢量场

$$\varphi_i = \nabla_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$$

φ_i 是一协变矢量。它又可以上升指标 i 而由逆变坐标给出

$$\varphi^j = g^{ji}\varphi_i = g^{ji}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

为了求一协变矢量 a_i 的旋度，先求 a_i 的协变导数

$$\nabla_j a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji} a_k$$

上式对调 i 与 j 并相减，注意到 $\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}$，便得

$$\nabla_j a_i - \nabla_i a_j = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i}$$

它叫协变矢量 a_i 的旋度。特别是当 a_i 是某标量场 $a(M)$ 的梯度时，即

$$a_i = \frac{\partial a}{\partial x^i}$$

时，有

$$\nabla_j a_i - \nabla_i a_j = \frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} = 0$$

即其旋度为零。反之，如果旋度为零，即

$$\nabla_j a_i - \nabla_i a_j = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i} = 0$$

则由微积分的定理可知，必局部地存在函数 $a(M)$ 满足

$$a_i = \frac{\partial a}{\partial x^i}$$

故得一协变矢量 a_i 为某一标量场的梯度的充要条件是其旋度为零。

为了求一逆变矢量 a^i 的散度，先求其协变导数

$$\nabla_j a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} a^k$$

因为 $\nabla_j a^i$ 为一混合张量，故关于 i 与 j 缩并，便得一个标量，即

$$\nabla_j a^j = \frac{\partial a^j}{\partial x^j} + \Gamma^j_{jk} a^k \tag{5—191}$$

再由公式(5—168)，有

$$\Gamma^j_{jk} = \Gamma^j_{kj} = \frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial x^k}$$

故式(5—191)可写为

$$\nabla_j a^j = \frac{\partial a^j}{\partial x^j} + \frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial x^j} a^j = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,a^j)}{\partial x^j}$$

这就是张量 a^i 的散度计算公式。

一个标量场 φ 的梯度的长度平方为

$$g^{ji}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$$

通常记作 $\Delta_1\varphi$，它叫贝尔特拉米(Beltrami)第一类微分参数。梯度 $\partial\varphi/\partial x^i$ 的逆变分量

$$g^{ji}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$$

的散度

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right)$$

通常记作 $\Delta_2\varphi$，它叫贝尔特拉米第二类微分参数，或叫拉普拉斯算子。

§5.13 曲率张量

一 黎曼——克里斯托弗尔张量的引入

张量微分与通常微分之间最明显的区别是，在作多次微分时，一般说来，张量微分的结果与微分的次序有关。例如，对一逆变矢量 a^k 分别作其二次协变导数 $\nabla_i\nabla_j a^k$ 及 $\nabla_j\nabla_i a^k$，并考察其差。

首先有

$$\nabla_j a^k = \frac{\partial a^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{jl}a^l$$

它是一个二阶混合张量，再求其协变导数，有

$$\begin{aligned}\nabla_i\nabla_j a^k &= \frac{\partial(\nabla_j a^k)}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ip}\nabla_j a^p - \Gamma^p_{ij}\nabla_p a^k\\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{jl}a^l\right) + \Gamma^k_{ip}\left(\frac{\partial a^p}{\partial x^j} + \Gamma^p_{jl}a^l\right)\\ &\quad - \Gamma^p_{ij}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x^p} + \Gamma^k_{lp}a^l\right)\\ &= \frac{\partial^2 a^k}{\partial x^i\partial x^j} + \Gamma^k_{jl}\frac{\partial a^l}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ip}\frac{\partial a^p}{\partial x^j} - \Gamma^p_{ij}\frac{\partial a^k}{\partial x^p}\\ &\quad - \Gamma^p_{ij}\Gamma^k_{lp}a^l + a^l\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^k_{jl} + \Gamma^k_{ip}\Gamma^p_{jl}\right)\end{aligned}$$

若将上式中 j 及 i 两指标对调，上式中前五项之和显然不变，而后两项则变成

$$a^l\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^k_{il} + \Gamma^k_{jp}\Gamma^p_{il}\right)$$

所以不难得到下面的等式

$$\nabla_i \nabla_j a^k - \nabla_j \nabla_i a^k = a^l \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ip}^k \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jp}^k \Gamma_{il}^p \right)$$

上式左边称为逆变矢量 a^k 的交错二阶协变导数。我们令

$$\mathbf{R}_{jil\cdot}^{\cdots k} = \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ip}^k \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jp}^k \Gamma_{il}^p \qquad (5—192)$$

则得

$$\nabla_i \nabla_j a^k - \nabla_j \nabla_i a^k = \mathbf{R}_{jil\cdot}^{\cdots k} a^l \qquad (5—193)$$

然而，一般 $\mathbf{R}_{jil\cdot}^{\cdots k}$ 并不恒为零。从而

$$\nabla_i \nabla_j a^k \neq \nabla_j \nabla_i a^k$$

这就表明求协变导数与其顺序有关。

在式(5—193)中，左边是二张量之差，因此也是个张量。而 a^k 是任意逆变矢量，由商定则知，$\mathbf{R}_{jil\cdot}^{\cdots k}$ 是一个三次协变一次逆变的四阶混合张量。这个张量通常称为黎曼——克利斯托弗尔张量。或称为黎曼空间的曲率张量。

我们从式(5—192)、(5—150)可知，曲率张量是仅由度规张量构成的。如果能够把坐标系选得使 g_{ij} 为常数，则在这个坐标系中以及所有其它的坐标系中，曲率张量的所有坐标均为零。

对于协变矢量 a_l，我们可用下面的方法来求它的交错二阶协变导数。

设 b^l 是任一逆变矢量。对不变量 $a_l b^l$ 求协变导数，有

$$\nabla_j (a_l b^l) = (\nabla_j a_l) b^l + a_l (\nabla_j b^l)$$

对上式再求一次协变导数，得

$$\nabla_i \nabla_j (a_l b^l) = \nabla_i (\nabla_j a_l) b^l + (\nabla_j a_l)(\nabla_i b^l) + (\nabla_i a_l)(\nabla_j b^l) + a_l (\nabla_i \nabla_j b^l)$$

上式中 ∇_i 与 ∇_j 的位置对调，这时左边不改变，因为不变量的协变导数与通常的导数相同。而在右边第二项与第三项的位置互换，所以并不改变它们的和。从上式减去它交换 ∇_i 及 ∇_j 的次序所得的公式，便得

$$0 = (\nabla_i \nabla_j a_l - \nabla_j \nabla_i a_l) b^l + a_l (\nabla_i \nabla_j b^l - \nabla_j \nabla_i b^l)$$

上式右边第一项中以 q 代 l，并在第二项中用公式(5—193)代入，便得

$$(\nabla_i \nabla_j a_q - \nabla_j \nabla_i a_q) b^q + a_l \mathbf{R}_{jiq\cdot}^{\cdots l} b^q = 0$$

考虑到 b^q 是任一张量，则所得的等式应该看作关于 b^q 的恒等式。

因此 b^{j} 的系数应为零，故有

$$\nabla_i \nabla_j a_q - \nabla_j \nabla_i a_q = -\mathbf{R}_{jiq}^{\cdots l}{}_{\cdot}\, a_l \qquad (5\text{—}194)$$

于是得到类似于式(5—193)的公式。

现在，我们来计算任意张量场，例如 $\mathbf{T}^{p}_{ij}$ 的交错二阶协变导数。

为此，我们采用类似的方法，把已知张量的每个协变指标与任意的一阶逆变张量相缩并，而把每一个逆变指标与任意一阶协变张量相缩并。于是我们得到一个不变量

$$\Phi = \mathbf{T}^{p}_{ij} a_p b^i c^j \qquad (5\text{—}195)$$

式中 a_p, b^i, c^j 是任意的张量场。然后计算

$$\nabla_l \nabla_k \Phi - \nabla_k \nabla_l \Phi$$

对式(5—195)求导两次，再与交换 ∇_l 及 ∇_k 后的式子相减，结果得

$$\begin{aligned}\nabla_l \nabla_k \Phi - \nabla_k \nabla_l \Phi = &(\nabla_l \nabla_k \mathbf{T}^{p}_{ij} - \nabla_k \nabla_l \mathbf{T}^{p}_{ij}) a_p b^i c^j \\ &+ \mathbf{T}^{p}_{ij}(\nabla_l \nabla_k a_p - \nabla_k \nabla_l a_p) b^i c^j \\ &+ \mathbf{T}^{p}_{ij}(\nabla_l \nabla_k b^i - \nabla_k \nabla_l b^i) a_p c^j \\ &+ \mathbf{T}^{p}_{ij}(\nabla_l \nabla_k c^j - \nabla_k \nabla_l c^j) a_p b^i\end{aligned}$$

因为 Φ 是不变量，故上式左边为零，右边的所有圆括号(除去第一个外)中，都用式(5—193)、(5—194)来代换。我们得到

$$\begin{aligned}0 = &(\nabla_l \nabla_k \mathbf{T}^{p}_{ij} - \nabla_k \nabla_l \mathbf{T}^{p}_{ij}) a_p b^i c^j \\ &+ \mathbf{T}^{p}_{ij}\{-\mathbf{R}_{lkp}^{\cdots q}{}_{\cdot}\, a_q b^i c^j + \mathbf{R}_{lkm}^{\cdots i}{}_{\cdot}\, a_p b^m c^j + \mathbf{R}_{lkm}^{\cdots j}{}_{\cdot}\, a_p b^i c^m\}\end{aligned}$$

因为 a_p, b^i, c^j 是任意张量场，故这里所得的是关于 a_p, b^i, c^j 的恒等式。因而乘积 $a_p b^i c^j$ 的系数经合并同类项以后应该等于零。为收集 $a_r b^s c^t$ 的系数，我们把 r, s, t 看作任意固定了的指标。在第一项中令 p, i, j 分别等于 r, s, t。第二项中令 q, i, j 分别等于 r, s, t。第三项中令 p, m, j 分别等于 r, s, t。第四项中令 p, i, m 分别等于 r, s, t。我们得到

$$\nabla_l \nabla_k \mathbf{T}^{r}_{st} - \nabla_k \nabla_l \mathbf{T}^{r}_{st} = -\mathbf{R}_{lks}^{\cdots i}{}_{\cdot}\, \mathbf{T}^{r}_{it} - \mathbf{R}_{lkt}^{\cdots j}{}_{\cdot}\, \mathbf{T}^{r}_{sj} + \mathbf{R}_{lkp}^{\cdots r}{}_{\cdot}\, \mathbf{T}^{p}_{st}$$

因而，任一张量的交错二阶协变导数可表示为

$$\begin{aligned}&\nabla_j \nabla_k \mathbf{T}^{r_1 r_2 \cdots r_l}_{s_1 s_2 \cdots s_m} - \nabla_k \nabla_j \mathbf{T}^{r_1 r_2 \cdots r_l}_{s_1 s_2 \cdots s_m} = \\ &= \sum_{p=1}^{l} \mathbf{R}_{jki}^{\cdots r_p}{}_{\cdot}\, \mathbf{T}^{r_1 \cdots r_{p-1} i r_{p+1} \cdots r_l}_{s_1 \cdots s_m} - \sum_{q=1}^{m} \mathbf{R}_{jks_q}^{\cdots i}{}_{\cdot}\, \mathbf{T}^{r_1 \cdots r_l}_{s_1 \cdots s_{q-1} i s_{q+1} \cdots s_m}\end{aligned}$$

(5—196)

上式称为李奇(Ricci)公式。

我们知道 $\mathbf{R}_{ijs}^{\cdots k}{}_{\cdot}$ 是一个张量，关于 k 与 i 缩并，便得

$$\mathbf{R}_{js}=\mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots i}. \qquad (5—197)$$

显然，这也是个张量，并称它为李奇张量。

式(5—197)两边乘 g^{js}，关于 j 与 k 缩并，可得

$$\mathbf{R}=g^{js}\mathbf{R}_{js} \qquad (5—198)$$

我们把它叫做曲率标量。

二　黎曼——克利斯托弗尔张量的性质

从黎曼——克利斯托弗尔张量的定义可知，它只与度规张量 g_{ik} 以及其第一、第二阶导数有关。由公式(5—192)有

$$\mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k}=\frac{\partial\Gamma_{js}^{k}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial\Gamma_{is}^{k}}{\partial x^{j}}+\Gamma_{il}^{k}\Gamma_{js}^{l}-\Gamma_{jl}^{k}\Gamma_{is}^{l} \qquad (5—199)$$

若将前两个指标对调，此张量的分量改变符号。由此可见，$\mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k}$ 是关于 i 与 j 反对称的，即

$$\mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k}=-\mathbf{R}_{jis\cdot}^{\cdots k}. \qquad (5—200)$$

又因

$$\mathbf{R}_{jsi\cdot}^{\cdots k}=\frac{\partial\Gamma_{si}^{k}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial\Gamma_{ji}^{k}}{\partial x^{s}}+\Gamma_{jl}^{k}\Gamma_{si}^{l}-\Gamma_{sl}^{k}\Gamma_{ji}^{l} \qquad (5—201)$$

$$\mathbf{R}_{sij\cdot}^{\cdots k}=\frac{\partial\Gamma_{ij}^{k}}{\partial x^{s}}-\frac{\partial\Gamma_{sj}^{k}}{\partial x^{i}}+\Gamma_{sl}^{k}\Gamma_{ij}^{l}-\Gamma_{il}^{k}\Gamma_{sj}^{l} \qquad (5—202)$$

将式(5—199)、(5—201)、(5—202)相加，我们得到对于三个协变指标的循环对称性质，即

$$\mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k}+\mathbf{R}_{jsi\cdot}^{\cdots k}+\mathbf{R}_{sij\cdot}^{\cdots k}=0 \qquad (5—203)$$

上式称为比安基(Bianchi)第一恒等式。

其次，将李奇公式(5—196)用于度规张量 g_{st}，便得

$$\nabla_{i}\nabla_{j}g_{st}-\nabla_{j}\nabla_{i}g_{st}=-\mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k}g_{kt}-\mathbf{R}_{ijt\cdot}^{\cdots k}g_{sk} \qquad (5—204)$$

因上式左边恒等于零，若令

$$\mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k}g_{kt}=\mathbf{R}_{ijst} \qquad (5—205)$$

则由式(5—204)得

$$\mathbf{R}_{ijst}=-\mathbf{R}_{ijts} \qquad (5—206)$$

即 $\mathbf{R}_{ijst}$ 关于后两个指标 s 与 t 是反称的。由式(5—205)所定义的协变张量 $\mathbf{R}_{ijst}$ 叫做协变曲率张量。有时也把 $\mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots t}$ 叫做第一类黎曼记号，而把 $\mathbf{R}_{ijst}$ 叫做第二类黎曼记号。显然，从定义可知，$\mathbf{R}_{ijst}$ 是关于前两个指标 i 与 j 也是反称的。即

$$\mathbf{R}_{ijst}=-\mathbf{R}_{jist} \qquad (5—207)$$

再对公式(5—203)乘以 g_{kt}，关于 k 作缩并，便得

$$\mathbf{R}_{ijst}+\mathbf{R}_{jsit}+\mathbf{R}_{sijt}=0 \qquad (5—208)$$

现求与公式(5—199)相类似的表示 R_{ijst} 的式子。由公式(5—205)有

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{ijst} &= g_{kt}\left(\frac{\partial \Gamma^k_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{is}}{\partial x^j} + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{js} - \Gamma^k_{jl}\Gamma^l_{is}\right) \\
&= g_{kt}\frac{\partial \Gamma^k_{js}}{\partial x^i} - g_{kt}\frac{\partial \Gamma^k_{is}}{\partial x^j} - \Gamma^k_{js}\frac{\partial g_{kt}}{\partial x^i} + \Gamma^k_{is}\frac{\partial g_{kt}}{\partial x^j} \\
&\quad + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{js}g_{kt} - \Gamma^k_{jl}\Gamma^l_{is}g_{kt} \\
&= g_{kt}\frac{\partial \Gamma^k_{js}}{\partial x^i} - g_{kt}\frac{\partial \Gamma^k_{is}}{\partial x^j} - \Gamma^k_{js}(\Gamma^l_{ik}g_{lt} + \Gamma^l_{it}g_{kl}) \\
&\quad + \Gamma^k_{is}(\Gamma^l_{jk}g_{lt} + \Gamma^l_{jt}g_{kl}) + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{js}g_{kt} - \Gamma^k_{jl}\Gamma^l_{is}g_{kt} \\
&= g_{kt}\frac{\partial \Gamma^k_{js}}{\partial x^i} - g_{kt}\frac{\partial \Gamma^k_{is}}{\partial x^j} - \Gamma^k_{js}\Gamma^l_{it}g_{kl} + \Gamma^k_{is}\Gamma^l_{jt}g_{kl}
\end{aligned}$$

将

$$\Gamma^k_{js}g_{st} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{st}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jt}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{js}}{\partial x^t}\right)$$

$$\Gamma^k_{is}g_{kt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{st}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{it}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{is}}{\partial x^t}\right)$$

代入上式,便得

$$\mathbf{R}_{ijst} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jt}}{\partial x^i \partial x^s} + \frac{\partial^2 g_{is}}{\partial x^j \partial x^t} - \frac{\partial^2 g_{js}}{\partial x^i \partial x^t} - \frac{\partial^2 g_{it}}{\partial x^j \partial x^s}\right) - \Gamma^k_{js}\Gamma^l_{it}g_{kl} + \Gamma^k_{is}\Gamma^l_{jt}g_{kl} \qquad (5—209)$$

由上式可知

$$\mathbf{R}_{ijst} = \mathbf{R}_{stij}$$

由于曲率张量的坐标具有一系列恒等的线性关系。由计算结果可知,它具有本质的坐标数且为

$$N = C^2_n \cdot 1 + C^3_n \cdot 3 + C^4_n \cdot 2 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

当 $n=2$ 时,$N=1$。当 $n=3$ 时,$N=6$。我们看到三维空间的曲率张量所具有的本质坐标个数与 g_{ij} 的坐标个数一样多。

最后,我们考察李奇张量。我们看到,上升 $\mathbf{R}_{ijst}$ 最后一个指标,得

$$\mathbf{R}^{\cdots k}_{ijs\cdot} = g^{kt}\mathbf{R}_{ijst}$$

把它代入式(5—197)中,便有

$$\mathbf{R}_{js} = g^{kt}\mathbf{R}_{kjst} \qquad (5—210)$$

再由协变曲率张量的性质

$$\mathbf{R}_{kjst} = \mathbf{R}_{tsjk}$$

于是式(5—210)可以改写为

$$\mathbf{R}_{js} = g^{kt}\mathbf{R}_{tsjk} = \mathbf{R}_{sj}$$

亦即李奇张量是对称的。

作为协变曲率张量性质的应用，我们推导一个重要的恒等式，它叫比安基恒等式。

对一个协变矢量 a_s 的协变导数 $\nabla_j a_s$ 应用李奇公式(5—196)，则有

$$\nabla_l \nabla_i \nabla_j a_s - \nabla_i \nabla_l \nabla_j a_s = -\mathbf{R}_{lij\cdot}^{\cdots k} \nabla_k a_s - \mathbf{R}_{lis\cdot}^{\cdots k} \nabla_j a_k \tag{5—211}$$

在上式中更换指标 $l \to i \to j \to l$，得

$$\nabla_i \nabla_j \nabla_l a_s - \nabla_j \nabla_i \nabla_l a_s = -\mathbf{R}_{ijl\cdot}^{\cdots k} \nabla_k a_s - \mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k} \nabla_l a_k \tag{5—212}$$

$$\nabla_j \nabla_l \nabla_i a_s - \nabla_l \nabla_j \nabla_i a_s = -\mathbf{R}_{jli\cdot}^{\cdots k} \nabla_k a_s - \mathbf{R}_{jli\cdot}^{\cdots k} \nabla_i a_k \tag{5—213}$$

其次，由式(5—196)

$$\nabla_i \nabla_j a_s - \nabla_j \nabla_i a_s = -\mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k} a_k$$

即

$$-\nabla_i \nabla_j a_s + \nabla_j \nabla_i a_s = \mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k} a_k$$

上式对 x^l 求协变导数，得

$$-\nabla_l \nabla_i \nabla_j a_s + \nabla_l \nabla_j \nabla_i a_s = (\nabla_l \mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k}) a_k + \mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k} \nabla_l a_k \tag{5—214}$$

在上式中更换指标 $l \to i \to j \to l$，得

$$-\nabla_i \nabla_j \nabla_l a_s + \nabla_i \nabla_l \nabla_j a_s = (\nabla_i \mathbf{R}_{jls\cdot}^{\cdots k}) a_k + \mathbf{R}_{jls\cdot}^{\cdots k} \nabla_i a_k \tag{5—215}$$

$$-\nabla_j \nabla_l \nabla_i a_s + \nabla_j \nabla_i \nabla_l a_s = (\nabla_j \mathbf{R}_{lis\cdot}^{\cdots k}) a_k + \mathbf{R}_{lis\cdot}^{\cdots k} \nabla_j a_k \tag{5—216}$$

将式(5—211)～(5—216)式相加，便得

$$\begin{aligned} &-(\mathbf{R}_{lij\cdot}^{\cdots k} + \mathbf{R}_{ijl\cdot}^{\cdots k} + \mathbf{R}_{jli\cdot}^{\cdots k}) a_k a_s \\ &+ (\nabla_l \mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k} + \nabla_i \mathbf{R}_{jls\cdot}^{\cdots k} + \nabla_j \mathbf{R}_{lis\cdot}^{\cdots k}) a_k = 0 \end{aligned}$$

由式(5—203)知，上式左边第一个圆括弧内为零。而余下的项又由于 a_k 是完全任意的，故得下列恒等式

$$\nabla_l \mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k} + \nabla_i \mathbf{R}_{jls\cdot}^{\cdots k} + \nabla_j \mathbf{R}_{lis\cdot}^{\cdots k} = 0 \tag{5—217}$$

此式称为比安基恒等式。在这个恒等式中，若令 $k = l$，缩并后，便

得

$$\nabla_k \mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k} - \nabla_i \mathbf{R}_{js} + \nabla_j \mathbf{R}_{is}^{\cdot\cdot} = 0$$

上式乘以 g^{js}，作缩并，并注意到

$$\mathbf{R}_{ijs\cdot}^{\cdots k} g^{js} = \mathbf{R}_{i\cdot}^{\cdot k} = \mathbf{R}_{ij} g^{jk} \qquad \mathbf{R}_{js} g^{js} = \mathbf{R}$$

便得到

$$2\nabla_k \mathbf{R}_{i\cdot}^{\cdot k} - \nabla_i \mathbf{R} = 0$$

若令

$$\mathbf{G}_s^m = \mathbf{R}_s^m - \frac{1}{2}\mathbf{R}\delta_s^m$$

则得

$$\nabla_k \mathbf{G}_s^k = \nabla_k \mathbf{R}_{s\cdot}^{\cdot k} - \frac{1}{2}\nabla_s \mathbf{R} = 0$$

这是在相对论中有重要应用的一个公式。

三　黎曼曲率　常曲率空间

设在黎曼空间中的一点 M，给定两个线性无关的矢量 a^k 与 b^k，由此作标量

$$\mathbf{K} = -\frac{\mathbf{R}_{kjih} a^k b^j a^i b^h}{(g_{jh} g_{ki} - g_{kh} g_{ji}) a^k b^j a^i b^h} \tag{5—218}$$

称它为关于二矢量 a^k 与 b^k 所确定方向的黎曼曲率（或称截面曲率）。过 M 点切于二矢量 a^k 与 b^k 所决定的二维平面作所有可能的测地线，形成一个二维曲面。此曲面在 M 处的高斯曲率便是 $\mathbf{K}$。

若 $\mathbf{K}$ 不论在哪一点都与方向 a^k，b^k 无关，由此可得

$$\mathbf{R}_{kjih} = -\mathbf{K}(g_{jh} g_{ki} - g_{kh} g_{ji}) \tag{5—219}$$

为了计算 $\mathbf{K}$，上式乘以 $g^{ji} g^{kh}$，作缩并，便得

$$\mathbf{R} = -\mathbf{K}(n - n^2)$$

即

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{R}}{n(n-1)} \tag{5—220}$$

若黎曼曲率不论对任何方向，也不论在任何点，都恒为零。则得

$$\mathbf{R}_{kjih} = 0$$

曲率张量 $\mathbf{R}_{kji\cdot}^{\cdots h}$ 为零的黎曼空间叫做平坦空间。

在式(5—219)中，$\mathbf{K}$ 一般可以是坐标的函数。将式(5—219)代入式(5—217)中，则有

$$(\nabla_l \mathbf{K})(g_{jh}g_{ki} - g_{kh}g_{ji}) + (\nabla_k \mathbf{K})(g_{ji}g_{lh} - g_{li}g_{jh}) +$$
$$+ (\nabla_j \mathbf{K})(g_{li}g_{kh} - g_{ki}g_{lh}) = 0$$

此式乘以 g^{ji}，作缩并，注意到

$$g^{ji}g_{ji} = \delta_p^p = n \qquad g_{jh}g_{ki}g^{ji} = g_{ki}\delta_h^i = g_{kh}$$
$$(\nabla_j \mathbf{K})g^{ji}g_{li} = (\nabla_j \mathbf{K})\delta_l^j = \nabla_l \mathbf{K}$$

便得到

$$g_{kh}\nabla_l \mathbf{K} - n g_{kh}\nabla_l \mathbf{K} + n g_{lh}\nabla_k \mathbf{K} -$$
$$- g_{lh}\nabla_k \mathbf{K} + g_{kh}\nabla_l \mathbf{K} - g_{lh}\nabla_k \mathbf{K} = 0$$

合并同类项后得

$$(g_{lh}\nabla_k \mathbf{K} - g_{kh}\nabla_l \mathbf{K})(n-2) = 0$$

这里所考察的是 $n > 2$ 的情况，因而

$$g_{lh}\nabla_k \mathbf{K} - g_{kh}\nabla_l \mathbf{K} = 0$$

上式乘以 g^{lh}，作缩并，得

$$(\nabla_k \mathbf{K})(n-1) = 0$$

故有

$$\nabla_k \mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x^k} = 0 \tag{5—221}$$

从而得到舒尔(Schur)定理：

若在空间($n > 2$)各点处，黎曼曲率和定义的两方向无关，则此黎曼曲率在空间到处是常数。

满足式(5—221)条件的空间，称为常曲率空间。

四　平均曲率、爱因斯坦(Einstein)空间

在黎曼空间中一点 $M(x^1, \cdots, x^n)$，考察互相正交的 n 个单位矢量 $h^k(i)$，其中 (i) 是区别矢量的指标，k 表示矢量的逆变指标。假设求总和的规律不适用于括号之内。

然而，$h^k(i)$ 是互相正交的 n 个单位矢量这一性质可用

$$g_{ts}h^t_{(i)}h^s_{(j)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{5—222}$$

来表示。我们把在空间各点定义的 n 个正交单位矢量之集叫做正交标架。设 $h^k(i)$ 的协变分量为

$$h_t(i) = g_{ts}h^s(i)$$

则由上式可得

$$h_s(i)h^s(j) = \delta_{ij}$$

上式表明，由 $h_s(i)$ 作成的矩阵与由 $h^s(j)$ 作成的矩阵之积等于由

δ_{ij}作成的矩阵,即单位矩阵。故有

$$\sum_{i=1}^{n} h_s(i) h^t(i) = \delta_s^t$$

上式乘以 g^{sk},作缩并,便得

$$\sum_{i=1}^{n} h^k(i) h^t(i) = g^{tk}$$

在此标架中,取两矢量 $h^k(i)$ 与 $h^k(j)$,由它们所定方向的黎曼曲率用 $\mathbf{K}_{(i)(j)}$ 表示,得

$$\mathbf{K}_{(i)(j)} = -\frac{\mathbf{R}_{stlk} h^t(j) h^s(i) h^l(i) h^k(j)}{(g_{sl} g_{tk} - g_{tl} g_{sk}) h^s(i) h^t(j) h^l(i) h^k(j)} \qquad (5—223)$$

注意到式(5—222)式,我们有

$$\mathbf{K}_{(i)(j)} = -\mathbf{R}_{stlk} h^s(i) h^t(j) h^l(i) h^k(j) \qquad (i \neq j)$$

上式关于 j 求总和,得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{K}_{(i)(j)} &= -\mathbf{R}_{stlk} h^s(i) h^l(i) \sum_{j=1}^{n} h^t(j) h^k(j)\\ &= -\mathbf{R}_{stlk} h^s(i) h^l(i) g^{tk}\\ &= \mathbf{R}_{tsl\cdot}^{\cdots t} h^s(i) h^l(i)\\ &= \mathbf{R}_{sl} h^s(i) h^l(i)\end{aligned}$$

上式叫做关于方向 $h^k(i)$ 的平均曲率。

再求关于 n 个互相正交的平均曲率的总和,得

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{(i)(j)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_{sl} h^s(i) h^l(i) = \mathbf{R}_{tl} g^{tl} = \mathbf{R} \qquad (5-224)$$

上式表明,关于 n 个互相正交方向的平均曲率的总和与标架的选法无关,它等于标量曲率。

现取任意矢量 a^k,设关于此方向的平均曲率为 $\mathbf{M}$,则

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{R}_{tl} a^t a^l}{g_{tl} a^t a^l}$$

我们求方向 a^k,使 $\mathbf{M}$ 取极值。为此,计算

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a^k} = 0$$

便得

$$\frac{2\mathbf{R}_{kl} a^k (g_{ij} a^i a^j) - 2 g_{ij} a^j (\mathbf{R}_{tk} a^t a^k)}{(g_{ij} a^i a^j)^2} = 0$$

即

$$(\mathbf{R}_{kl} - \mathbf{M} g_{kl}) a^l = 0$$

满足此方程的方向一般有 n 个，而且互相正交。它们称为李奇主方向。使李奇主方向不定的空间，即

$$\mathbf{R}_{ii} = \mathbf{M} g_{ii} \tag{5—225}$$

的空间称为爱因斯坦空间。

上式乘以 g^{ii}，作缩并，得

$$g^{ii}\mathbf{R}_{ii} = n\mathbf{M}$$

故

$$\mathbf{M} = \frac{1}{n}\mathbf{R}$$

从而式(5—225)式又可写作

$$\mathbf{R}_{ii} = \frac{1}{n}\mathbf{R} g_{ii} \tag{5—226}$$

参考资料

〔1〕 Н. А. Гольдфайн 著“矢算概论”，商务印书馆(1953)

〔2〕 Н. Е. Кочин 著“向量计算及张量计算初步”， 商务印书馆(1954)

〔3〕 В. И. Смирнов 著“高等数学教程”(二卷二分册)，高等教育出版社(1956)

〔4〕 王竹溪、郭敦仁“特殊函数概论”，科学出版社(1979)

〔5〕 J. D. Stratton “Electromagnetic Theory” McGraw-Hill Book Company (1941)

〔6〕 E. C. Young “Vector and Tensor Analysis” Marcel Dekker, Inc. (1978)

〔7〕 Sokolnikoff I. S. “Tensor Analysis” John Wiley & Sons, Inc. (1960)